

Análisis espectral de matrices de Toeplitz tridiagonales simétricas con entradas $-1, 2, -1$

Estos apuntes están escritos por Luis Angel González Serrano y Egor Maximenko. En estos apuntes consideramos un ejemplo muy conocido. Posiblemente este ejemplo fue estudiado desde los tiempos de Daniel Bernoulli. En estos apuntes aplicamos (sin demostración) fórmulas generales para los determinantes y los vectores propios de matrices de Toeplitz de banda.

Esperamos que los apuntes puedan ser útiles para los estudiantes que empiezan a trabajar con matrices de Toeplitz, o escribir textos matemáticos en \LaTeX haciendo comprobaciones en Sagemath.

Consideramos matrices de Toeplitz $T_n(a)$ generadas por el siguiente polinomio de Laurent:

$$a(t) = -t^{-1} + 2 - t.$$

Por ejemplo,

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Las matrices de esta forma se pueden considerar como análogos discretos de la segunda derivada. Más precisamente, matrices de esta forma surgen al discretizar con el método de diferencias finitas el problema de Dirichlet

$$y''(x) = f(x), \quad y(0) = w_0, \quad y(1) = w_1.$$

También surgen al discretizar y resolver con métodos numéricos las ecuaciones de calor y de onda sobre un intervalo, al estudiar un sistema de masas y resortes (en el caso más simple), etc.

Análisis de la función generadora

Después del cambio de variable $t = e^{i\vartheta}$ obtenemos la siguiente función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(\vartheta) = a(e^{i\vartheta}) = -2 \cos(\vartheta) + 2 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

La función g es continua y toma valores de 0 a 4. Según la teoría general de matrices de Toeplitz, esto implica que para cada n en \mathbb{N} los valores propios de $T_n(a)$ están en el intervalo $(0, 4)$.

Notamos que la función g crece estrictamente en $[0, \pi]$, tomando valores de 0 a 4. Por lo tanto, para cada λ en $[0, 4]$ existe un único punto ϑ en $[0, \pi]$ tal que $g(\vartheta) = \lambda$. Denotemos este punto por $\varphi(\lambda)$. Es fácil ver que

$$\varphi(\lambda) = 2 \arcsin \frac{\sqrt{\lambda}}{2}. \quad (1)$$

Programamos en Sagemath las funciones g y φ y una función que hace la prueba:

```

1 def g(x) :
2     return 4 * (sin(x / 2)) ** 2
3
4 def ph(la) :
5     return 2 * arcsin(sqrt(la) / 2)
6
7 def testph(la) :
8     la1 = N(la)
9     ph1 = ph(la1)
10    la2 = g(ph1)
11    return abs(la1 - la2)

```

Al ejecutar la función `testph` con algunos valores de λ , obtenemos valores muy pequeños y así comprobamos que la fórmula (1) es correcta.

La Figura 1 muestra la gráfica de la función g y la relación entre λ y $\varphi(\lambda)$.

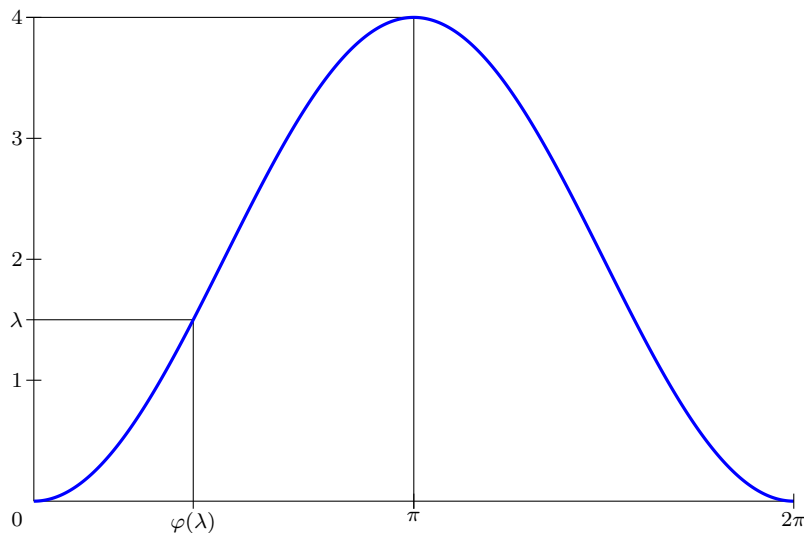


Figura 1: La gráfica de la función g .

Ceros de la función $\lambda - a$

Sabemos que los valores propios de $T_n(a)$ pertenecen al intervalo $(0, 4)$, por eso vamos a calcular el polinomio característico $\det(\lambda I_n - T_n(a))$ solamente para λ en $[0, 4]$. Notamos que

$$\det(\lambda I_n - T_n(a)) = \det(T_n(\lambda 1) - T_n(a)) = \det(T_n(\lambda - a)).$$

Para aplicar la fórmula para el determinante de la matriz de Toeplitz, necesitamos calcular los ceros de la función $\lambda - a$.

Ya sabemos que la ecuación $g(\vartheta) = \lambda$ tiene dos soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$, a saber, $\varphi(\lambda)$ y $2\pi - \varphi(\lambda)$. Por lo tanto, la función $\lambda - a$ tiene ceros

$$z_1(\lambda) = e^{i\varphi(\lambda)}, \quad z_2(\lambda) = e^{i(2\pi - \varphi(\lambda))} = e^{-i\varphi(\lambda)}.$$

Para demostrar que no hay otros ceros, escribimos la diferencia $\lambda - a$ de la siguiente manera:

$$\lambda - a(t) = t^{-1} + (\lambda - 2) + t = t^{-1}(t^2 + (\lambda - 2)t + 1).$$

El polinomio cuadrático tiene solamente dos ceros. Concluimos que los ceros de $\lambda - a$ son $z_1(\lambda)$ y $z_2(\lambda)$, y no hay otros.

Verifiquemos con las fórmulas de Vieta que $z_1(\lambda)$ y $z_2(\lambda)$ realmente son ceros del polinomio $t^2 + (\lambda - 2)t + 1$. El producto $z_1(\lambda)z_2(\lambda)$ es 1. Probemos que la suma $z_1(\lambda) + z_2(\lambda)$ es $2 - \lambda$:

$$\begin{aligned} z_1(\lambda) + z_2(\lambda) &= e^{i\varphi(\lambda)} + e^{-i\varphi(\lambda)} = 2 \cos(\varphi(\lambda)) = 2 \cos\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) \\ &= 2 \left(1 - 2 \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^2\right) = 2 \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = 2 - \lambda. \end{aligned}$$

También hacemos una comprobación numérica en Sagemath.

```
1 def a(t):
2     return - (1 / t) + 2 - t
3
4 def zero1(la):
5     return exp(i * ph(la))
6
7 def zero2(la):
8     return exp(- i * ph(la))
9
10 def testz1z2(la):
11     la1 = N(la)
12     z1 = zero1(la)
```

```

13 z2 = zero2(la)
14 er1 = abs(la - a(z1))
15 er2 = abs(la - a(z2))
16 return [er1, er2]

```

Polinomio característico

Recordemos la fórmula general para el determinante de la matriz de Toeplitz de banda. Widom [7], Baxter y Schmidt [3] y Trench [6] encontraron varias formas equivalentes de esta fórmula, sin usar los polinomios de Schur. Si

$$b(t) = \sum_{k=-q}^p b_k t^k = b_p t^{-q} \prod_{k=1}^{p+q} (t - x_k),$$

entonces

$$\det T_n(b) = (-1)^{pn} b_p^n s_{(n^p)}(x_1, \dots, x_{p+q}).$$

Ahora consideramos el polinomio de Laurent de nuestro ejemplo tridiagonal:

$$b_\lambda(t) = \lambda - a(t) = t^{-1} + (\lambda - 2) + t^1 = t^{-1}(t - z_1(\lambda))(t - z_2(\lambda)).$$

Notamos que $p = q = 1$, $a_p = 1$, y los ceros de b_λ son $z_1(\lambda)$ y $z_2(\lambda)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \det(T_n(\lambda - a)) &= (-1)^n s_{(n)}(z_1(\lambda), z_2(\lambda)) = (-1)^n h_n(z_1(\lambda), z_2(\lambda)) \\ &= (-1)^n \tilde{h}_n\left(z_1(\lambda) + \frac{1}{z_1(\lambda)}\right) = (-1)^n U_n\left(\frac{z_1(\lambda) + z_1^{-1}(\lambda)}{2}\right) \\ &= (-1)^n U_n\left(\frac{e^{i\varphi(\lambda)} + e^{-i\varphi(\lambda)}}{2}\right) = (-1)^n U_n(\cos \varphi(\lambda)) \\ &= (-1)^n \frac{\sin((n+1)\varphi(\lambda))}{\sin \varphi(\lambda)}. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $\lambda = g(\vartheta)$ con $\vartheta \in [0, \pi]$, esto es, $\vartheta = \varphi(\lambda)$. Obtenemos la siguiente función:

$$f_n(\vartheta) := \det(T_n(g(\vartheta) - a)) = (-1)^n \frac{\sin((n+1)\vartheta)}{\sin \vartheta}.$$

```

1 def f(n, tht):
2     return ((-1)**n)*sin((n+1)*tht)/sin(tht)
3
4 def toeplitz_matrix_tridiagonal(n):
5     T = matrix(RDF, n, n)

```

```

6   for j in range(n):
7       T[j, j] = 2
8   for j in range(n-1):
9       T[j, j + 1] = -1
10      T[j + 1, j] = -1
11   return T
12
13 def testf(n, la):
14     la1 = N(la)
15     result1 = f(n, ph(la1))
16     T = toeplitz_matrix_tridiagonal(n)
17     result2 = det(la1 * identity_matrix(n) - T)
18     return abs(result1 - result2)
19
20 def f4(tht):
21     return f(4, tht)
22
23 def f5(tht):
24     return f(5, tht)

```

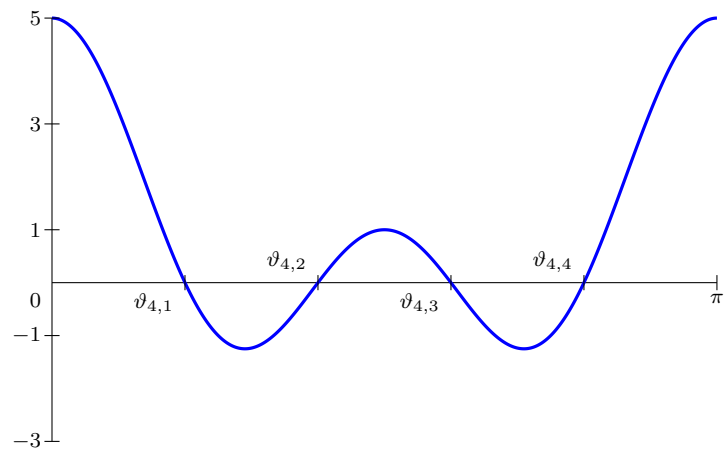


Figura 2: La gráfica de la función f_4 . Están marcados sus ceros $\vartheta_{4,1}, \dots, \vartheta_{4,4}$.

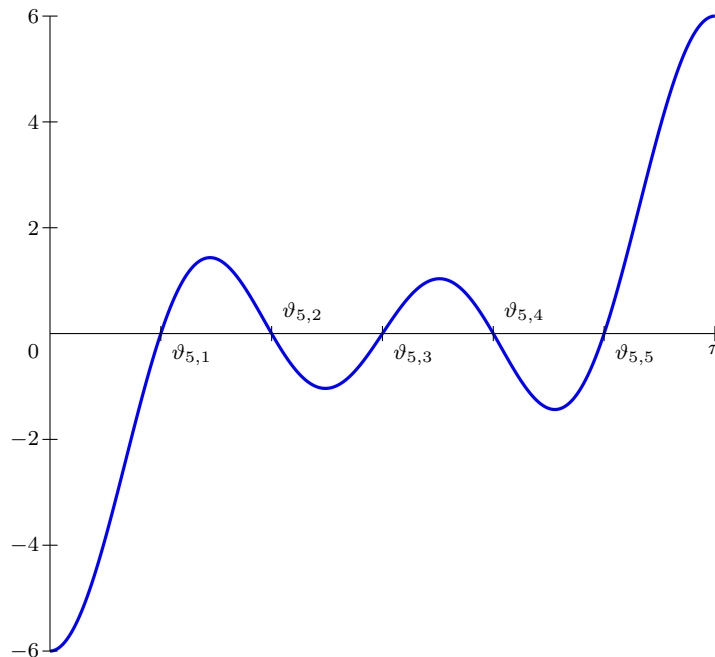


Figura 3: La gráfica de la función f_5 . Están marcados sus ceros $\vartheta_{5,1}, \dots, \vartheta_{5,5}$.

Valores propios

Los valores propios de $T_n(a)$ están en el intervalo $(0, 4)$. Este intervalo corresponde al intervalo $(0, \pi)$ de la variable ϑ , con el cambio de variable $\lambda = g(\vartheta)$, o $\vartheta = \varphi(\lambda)$.

Analicemos la ecuación $f(\vartheta) = 0$ en el intervalo $(0, \pi)$. Notamos que el denominador del cociente

$$\frac{\sin((n+1)\vartheta)}{\sin(\vartheta)}$$

no se anula, y el numerador se anula en los puntos de la forma $\vartheta = \frac{k\pi}{n+1}$, donde $k \in \mathbb{Z}$. La condición $0 < \vartheta < \pi$ implica que $0 < k < n+1$, esto es, $1 \leq k \leq n$. Denotemos por $\vartheta_{n,k}$ los ceros encontrados de la función f_n :

$$\vartheta_{n,k} = \frac{k\pi}{n+1} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Haciendo el cambio de variable $\lambda = g(\vartheta)$ obtenemos la fórmula final para los valores propios de $T_n(a)$:

$$\lambda_{n,k} = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Vectores propios

Recordemos el Teorema 2.3 de [5]. Si λ es un valor propio de $T_n(a)$ y z_1, \dots, z_{p+q} son los ceros del polinomio $\lambda - a$, entonces el vector $v = [v_m]_{m=1}^n$ con las componentes

$$v_m = s_{((n-1)^{p-1}, n-m)}(z_1, \dots, z_{p+q})$$

satisface $T_n(a)v = \lambda v$.

En particular, si $p = q = 1$, entonces

$$v_m = s_{n-m}(z_1, z_2) = h_{n-m}(z_1, z_2) = \frac{\sin((n-m+1)\varphi(\lambda))}{\sin \varphi(\lambda)}.$$

Consideramos $\lambda = \lambda_{n,k}$. En este caso

$$z_1(\lambda_{n,k}) = e^{i\varphi(\lambda_{n,k})}, \quad z_2(\lambda_{n,k}) = e^{-i\varphi(\lambda_{n,k})},$$

ademas

$$\varphi(\lambda_{n,k}) = \vartheta_{n,k} = \frac{k\pi}{n+1}.$$

Denotamos el vector propio correspondiente por $v_{n,k}$, y sus componentes por $v_{n,k,m}$:

$$\begin{aligned} v_{n,k,m} &= \frac{\sin((n-m+1)\varphi(\lambda_{n,k}))}{\sin \varphi(\lambda_{n,k})} = \frac{\sin((n-m+1)\vartheta_{n,k})}{\sin \vartheta_{n,k}} = \frac{\sin((n-m+1)\frac{k\pi}{n+1})}{\sin \frac{k\pi}{n+1}} \\ &= \frac{\sin(k\pi - \frac{mk\pi}{n+1})}{\sin \frac{k\pi}{n+1}} = (-1)^{k+1} \frac{\sin \frac{mk\pi}{n+1}}{\sin \frac{k\pi}{n+1}}. \end{aligned}$$

El factor $\frac{(-1)^{k+1}}{\sin \frac{k\pi}{n+1}}$ no depende de m , es decir, es un factor común que tienen todas las entradas del vector $v_{n,k}$. Por lo tanto, luego omitiremos este factor.

Recordamos la fórmula de Dirichlet (la expresión en ambos lados se conoce como el *núcleo de Dirichlet*):

$$1 + 2 \sum_{m=1}^n \cos(m\alpha) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\alpha)}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (2)$$

Calculemos el cuadrado de la norma del vector usando la fórmula de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \sin^2 \frac{mk\pi}{n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left(1 - \cos \frac{2mk\pi}{n+1}\right) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \cos \frac{2mk\pi}{n+1} \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^n \cos \frac{2mk\pi}{n+1}\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\sin \frac{((2n+1)k\pi)}{n+1}}{4 \sin \frac{k\pi}{n+1}} \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\sin((2 - \frac{1}{n+1})k\pi)}{4 \sin \frac{k\pi}{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Denotamos por $u_{n,k} = [u_{n,k,m}]_{m=1}^n$ al vector propio normalizado. Tenemos la siguiente fórmula para sus entradas:

$$u_{n,k,m} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{mk\pi}{n+1}. \quad (3)$$

Denotemos por S_n a la matriz formada por las columnas $u_{n,1}, \dots, u_{n,n}$:

$$S_n = \left[\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \right]_{j,k=1}^n. \quad (4)$$

Para entender mejor la regla por la cual se calculan las componentes del vector $u_{n,k}$, definimos las siguientes funciones:

$$U_{n,k}(x) := \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{k\pi x}{n+1}.$$

Entonces los números $u_{n,k,m}$ se pueden ver como los valores de la función $U_{n,k}$ en los puntos $1, \dots, n$.

```

1 def dst_matrix(n):
2     # discrete sine transform matrix
3     S = matrix(RDF, n, n)
4     c = sqrt(2 / (n + 1))
5     for j in range(n):
6         for k in range(n):
7             S[j, k] = c * sin((j+1) * (k+1) * pi) / (n+1)
8     return S
9
10 def eigvals(n):
11     thetas = [(k + 1) * pi / (n + 1) for k in range(n)]
12     la = [g(t) for t in thetas]
13     return vector(RDF, la)
14
15 def test_eigvecs(n):
16     T = toeplitz_matrix_tridiagonal(n)
17     S = dst_matrix(n)
18     Id = identity_matrix(RDF, n)
19     D = diagonal_matrix(eigvals(n))
20     Res1 = S * S - Id
21     er1 = Res1.norm('frob')
22     Res2 = S * T * S - D
23     er2 = Res2.norm('frob')
24     return [er1, er2]

```

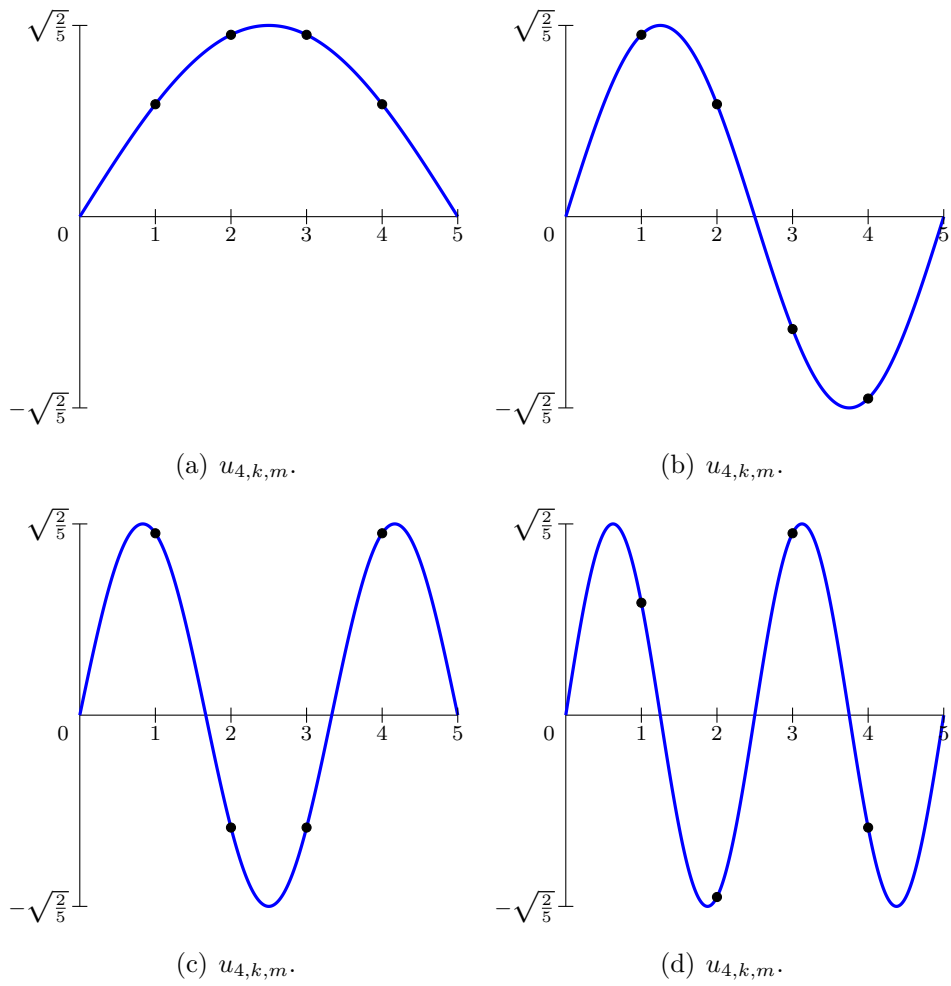



Figura 4: Las gráficas de las funciones $U_{4,k}$ con $k \in \{1, 2, 3, 4\}$; están marcadas los puntos con las abscisas 1, 2, 3, 4.

Referencias

- [1] Alexandersson, Per (2012): Schur polynomials, banded Toeplitz matrices and Widom's formula, *Electron. J. Combin.* 19:4, P22,
url: <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v19i4p22>.
- [2] Böttcher, Albrecht; Grudsky, Sergei M. (2005): *Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices*. SIAM, Philadelphia, 2005,
doi: 10.1137/1.9780898717853.
- [3] Baxter, Glen; Schmidt, Palle (1961): Determinants of a certain class of non-Hermitian Toeplitz matrices. *Math. Scand.* 9:1a, 122–128,
url: <https://www.jstor.org/stable/24489068>.
- [4] Elouafi, Mohamed (2015): On a relationship between Chebyshev polynomials and Toeplitz determinants, *Appl. Math. Comput.* 229:1, 27–33,
doi: 10.1016/j.amc.2013.12.029.
- [5] Maximenko, Egor A.; Moctezuma-Salazar, Mario Alberto (2017): Cofactors and eigenvectors of banded Toeplitz matrices: Trench formulas via skew Schur polynomials. *Operators and Matrices* 11:4, 1149–1169,
doi: 10.7153/oam-2017-11-79.
- [6] Trench, William F. (1985): On the eigenvalue problem for Toeplitz band matrices, *Linear Algebra Appl.* 64, 199–214
doi: 10.1016/0024-3795(85)90277-0.
- [7] Widom, Harold (1958): On the eigenvalues of certain hermitian operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* 88, 491–522,
doi: 10.1090/S0002-9947-1958-0098321-8.