INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Servicio Social

Apuntes sobre:

Demostración del Teorema de Jacobi acerca de los menores de la matriz adjugada

Fidel Vásquez Rojas

Proyecto de investigación:
IPN-SIP 20130633 (Propiedades espectrales de matrices y operadores de Toeplitz)

Director del proyecto de investigación:
Egor Maximenko

MÉXICO, D.F.
Febrero 2014

Índice

1. Introducción

El propósito de estos apuntes y ejercicios es demostrar el Teorema de Jacobi sobre los menores de la matriz adjugada clásica. Para lograrlo comenzamos mencionando las propiedades básicas del determinante de una matriz, así como el hecho de que el determinante es una función polilineal y alternante de los renglones, que es un tema estándar de álgebra lineal pero considero útil incluirlo; luego pasamos a los temas sobre menores, cofactores, desarrollo del determinante por cofactores, matriz adjugada clásica y su propiedad principal donde se incluyen demostraciones, ejemplos y ejercicios que servirán como idea para comprender las demostraciones posteriores. Después de esto estamos listos para comenzar nuestro camino hacia la demostración del Teoreme de Jacobi, el cual consiste en utilizar matrices definidas por menores. Se comenzará la segunda mitad del texto definiendo la k-ésima matriz de menores de una matriz (kth compound matrix), luego mencionaremos la fórmula de la expansión de Laplace para el determinante que es una generalización de la expansión por cofactores. Se definirá en analogía con la matriz adjugada clásica o matriz de cofactores transpuesta, una matriz de complementos algebraicos transpuesta, además también demostraremos una propiedad para esta nueva matriz que se compara con la propiedad principal de la matriz adjugada clásica. Dejaremos a un lado por un momento las matrices de menores para pasar al famoso Teorema de Binet–Cauchy sobre el determinante del producto de dos matrices que utilizaremos para luego demostrar el Teorema de Binet-Cauchy para matrices de menores. En este punto estaremos en condiciones para cumplir nuestro propósito, demostrar el Teorema de Jacobi, nos basaremos en la propiedad principal de la matriz de complementos algebraicos transpuesta y en el Teorema de Binet–Cauchy para matrices de menores.

2. Determinantes

2.1. Definición y propiedades

Sea $\mathbb{F}$ un campo.

Definición 2.1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ con $A = [A_{i,j}]_{i,j=1}^n$, se define el *determinante* de A mediante la siguiente fórmula:

$$\det(A) \coloneqq \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi \prod_{i=1}^n A_{i,\varphi(i)} = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi A_{1,\varphi(1)} \cdots A_{n,\varphi(n)}, \tag{1}$$

donde S_n es el conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 2.2. El determinante deS una matriz de orden 3×3 es:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$= A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2}.$$

En cambio si queremos calcular el determinante de

$$B = \begin{bmatrix} A_{2,2} & A_{2,1} \\ A_{2,1} & A_{1,1} \end{bmatrix},$$

no debemos confundirnos, por definición tendremos que

$$\det(B) = B_{1,1}B_{2,2} - B_{1,2}B_{2,1},$$

donde $B_{1,1} = A_{2,2}$, $B_{1,2} = A_{2,1}$, $B_{2,1} = A_{2,1}$ y $B_{2,2} = A_{1,1}$, y entonces

$$\det(B) = A_{2,2}A_{1,1} - A_{2,1}^2.$$

Las propiedades que se mencionan a continuación no se demuestran pero pueden verificarse fácilmente a partir de la definición del determinante.

Observación 2.3. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y $\lambda \in \mathbb{F}$.

1. Determinante de la matriz transpuesta.

   $$\det(A^\top) = \det(A).$$

   Por ejemplo, para una matriz de orden 2×2 tenemos:

   $$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} = A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{vmatrix}.$$

2. Determinante de la matriz indentidad.

   $$\det(\mathbf{I}_n) = 1.$$

3. Determinante de una matriz multiplicada por un escalar.

   $$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

4. Determinante de una matriz triangular superior.
   Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz triangular superior, es decir, $A_{i,j} = 0$ si $i > j$, entonces
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$
   Por ejemplo:
$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{vmatrix} = A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}.$$

La siguiente proposición nos será útil más adelante y para la demostración es suficiente la definición de determinante, por eso la enunciaremos y desmostraremos en seguida.

Proposición 2.4. *Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $\sigma, \tau \in S_n$, y B la matriz que se obtiene de A al permutar sus filas respecto a σ y al permutar las columnas respecto a τ, es decir, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $B_{i,j} = A_{\sigma(i),\tau(j)}$. Entonces se cumple*
$$\det(B) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\det(A).$$

Demostración. Tenemos por la definición de determinante que
$$\det(B) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\varphi(i)} = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i),\tau\circ\varphi(i)}, \tag{2}$$
ya que si $B_{i,j} = A_{\sigma(i),\tau(j)}$ entonces $B_{i,\varphi(i)} = A_{\sigma(i),\tau\circ\varphi(i)}$. Sea $j = \sigma(i)$ y escribamos (2) en términos de j para reordenar los productos
$$\det(B) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{j=1}^{n} A_{j,\tau\circ\varphi\circ\sigma^{-1}(j)}.$$

Multipliquemos el sumando de la derecha anterior por $\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$ dos veces para no alterarlo, entonces
$$\det(B) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\varphi)\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{j,\tau\circ\varphi\circ\sigma^{-1}(j)}. \tag{3}$$

Tenemos que $\tau S_n \sigma^{-1} = S_n$ ya que S_n es un grupo. Sea entonces $\rho = \tau \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$ y usando el hecho de que $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ tenemos
$$\operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\tau \circ \varphi \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\varphi)\operatorname{sgn}(\sigma),$$

escribiendo (3) en términos de ρ obtenemos finalmente

$$\det(B) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{\rho\in S_n}\operatorname{sgn}(\rho)\prod_{j=1}^{n} A_{j,\rho(j)} = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)\det(A). \qquad \square$$

2.2. El determinante como forma polilineal alternante de los renglones

A veces es cómodo considerar la función determinante como una función de n argumentos vectoriales: para $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$, donde $a_i = \left[a_{i,j}\right]_{j=1}^{n}$,

$$\operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_n) \coloneqq \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Vista de esta manera la función determinante cumple con las propiedades que enunciaremos a continuación.

Teorema 2.5 (El determinante es una forma n-lineal de los renglones)**.** *Para todo índice $k \in \{1, \ldots, n\}$, todos los vectores $a_1, \ldots, a_{k-1}, b, c, a_{k+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$ y todos los escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ se cumple:*

$$\operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_{k-1}, \lambda b + \mu c, a_{k+1}, \ldots, a_n) =$$

$$= \lambda \operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n) + \mu \operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Por ejemplo se tiene

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix},$$

al ver a la primera fila como un múltiplo de $[1 \;\; 1]$, y

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

considerando la segunda fila como suma de $[2 \;\; 0]$ y $[0 \;\; 1]$.

Teorema 2.6 (El determinante es una función alternante de los renglones)**.** *Sean* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$ *y* $a_i = a_j$ *para algunos* $1 \leq i < j \leq n$ *entonces:*

$$\operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

En otras palabras, indica que el determinante de cualquier matriz con dos filas iguales es cero.

Proposición 2.7 (El determinante es una función antisimétrica de los renglones)**.** *Sean* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$ *entonces para todo par* (i, j) *con* $1 \leq i < j \leq n$ *se tiene:*

$$\operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) =$$

$$-\operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Ejercicio 2.8. Deduzca a partir de los teoremas (2.5) y (2.6) la proposición (2.7).
Sugerencia.
Generalize la siguiente idea con vectores: para una matriz de tamaño 2×2 se tiene

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} + A_{2,1} & A_{1,2} + A_{2,2} \\ A_{2,1} + A_{1,1} & A_{2,2} + A_{1,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{1,1} & A_{1,2} \end{vmatrix},$$

por la linealidad del determinante. Además el determinante es igual a 0 porque la matriz tiene sus dos filas iguales, entonces

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{1,1} & A_{1,2} \end{vmatrix}.$$

Corolario 2.9. *Sean* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{F}$*. Entonces para toda pareja* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ *se cumple*

$$\operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + \lambda a_k, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

El corolario anterior permite aplicar la eliminación de Gauss al cálculo de determinantes. Tenemos el siguiente ejemplo para mostrar su uso.

Ejemplo 2.10. Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calculemos su determinante usando el corolario anterior:
sumamos a la fila 2 la fila 1 y no alteramos el determinante

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix},$$

a la fila 3 le sumamos 2 veces la fila 1

$$= \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix},$$

finalmente a la fila 3 le restamos la fila 2

$$= \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix},$$

obtenemos el determinante de una matriz triangular superior, entonces

$$\det(A) = -5.$$

Observación 2.11. El determinante es una función polilineal alternante de las columnas, y se cumplen las propiedades anteriores para columnas en vez de renglones. Esto es porque el determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta.

Ejercicio 2.12.

1. Demuestre que el determinante de una matriz complejas antisimétrica y de orden impar, es cero. Como recordatorio, una matriz A es antisimétrica si $A^\top = -A$.

2. Demuestre que el determinante de una matriz compleja anti-hermitiana de orden impar, es puramente imaginaria. Una matriz es anti-Hermitiana si $\overline{A^\top} = -A$.

3. Calcule el determinante de las siguientes matrices usando las propiedades vistas.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \\ n+1 & \dots & 2n \\ \vdots & & \vdots \\ (n-1)n+1 & \dots & n^2 \end{bmatrix}.$$

3. Conceptos básicos y expansión del determinante por cofactores

3.1. Submatriz

Definición 3.1. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$, $p \leq n$, $q \leq m$, $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$ y $J = (j_1, \ldots, j_q) \in \{1, \ldots, m\}^q$, denotamos por A^I_J a la *submatriz* de A dada por:

$$A^I_J = [A_{i_\alpha, j_\beta}]^{p,q}_{\alpha,\beta=1}.$$

A esta matriz le llamaremos *submatriz de A correspondiente a las filas con índices en I y columnas con índices en J*, o simplemente *submatriz* (I, J) *de* A.
Si $I = (1, \ldots, n)$ entonces escribiremos simplemente A_J en vez de A^I_J y de manera similar si se tiene $J = (1, \ldots, m)$ escribiremos A^I en lugar de A^I_J. Notemos que

$$A^I_J = (A^I)_J = (A_J)^I.$$

Si I y J son algunos subconjuntos de índices ($I \subseteq \{1, \ldots, n\}$,$J \subseteq \{1, \ldots, m\}$), entonces los convertimos en listas escribiendo sus elementos en orden ascendiente para aplicar la definición escrita arriba. Así por ejemplo se tendrá que

$$A^{\{3,1\}}_{\{4,2\}} = A^{(1,3)}_{(2,4)}.$$

Ejemplo 3.2. Para una matriz de orden 4×3 las submatrices $[(1, 2, 4), (2, 1)]$ y $[(1, 4, 2), (2, 1)]$ de A son:

$$A^{(1,2,4)}_{(2,1)} = \begin{bmatrix} A_{1,2} & A_{1,1} \\ A_{2,2} & A_{2,1} \\ A_{4,2} & A_{4,1} \end{bmatrix},$$

y

$$A^{(1,4,2)}_{(2,1)} = \begin{bmatrix} A_{1,2} & A_{1,1} \\ A_{4,2} & A_{4,1} \\ A_{2,2} & A_{2,1} \end{bmatrix}.$$

Vemos que aunque los conjuntos de índices de los renglones en ambas submatrices son iguales, las submatrices son distintas pues consideramos tuplas para los índices.

3.2. Menor

Definición 3.3. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq m$. El *menor* de rango r de la matriz A, correspondiente a las filas $i_1, \ldots, i_r$ y las columnas $j_1, \ldots, j_r$, se define como el determinante de la submatriz $A^{(i_1,\ldots,i_r)}_{(j_1,\ldots,j_r)}$ y se denota por $\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$. Es decir

$$\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix} := \det(A^{(i_1,\ldots,i_r)}_{(j_1,\ldots,j_r)}).$$

Ejemplo 3.4. Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

calculemos el menor correspondiente a las filas $1, 3$ y a las columnas $2, 3$.
La submatriz $A^{(1,3)}_{(2,3)}$ es la que tiene sus entradas en la intersección de las filas 1 y 3 con las columnas 2 y 3 de la matriz original. A continuación se resaltan tales entradas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A^{(1,3)}_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

así

$$\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \det(A^{(1,3)}_{(2,3)}) = 3.$$

Observación 3.5. Al elegir las filas y columnas para un menor, por definición, se escriben los índices en una lista con orden ascendiente así que no tiene sentido hablar por ejemplo del menor correspondiente a las filas $1, 3, 2$ y columnas $1, 2, 3$, sin embargo sí tiene sentido, según nuestra definición, hablar de la submatriz correspondiente a las filas y a las columnas con tales índices.

3.3. Cofactor

Definición 3.6. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $p, q \in \{1, \ldots, n\}$. El *cofactor* (o el *adjunto*) de la entrada (p, q) de la matriz A se define como el menor correspondiente a las filas

$\{1,\ldots,n\}\setminus\{p\}$ y las columnas $\{1,\ldots,n\}\setminus\{q\}$, multiplicado por $(-1)^{p+q}$. Lo denotamos por $\widehat{A}_{p,q}$:

$$\widehat{A}_{p,q} \coloneqq (-1)^{p+q}\,\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,n \\ 1,\ldots,q-1,q+1,\ldots,n \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,n \\ 1,\ldots,q-1,q+1,\ldots,n \end{pmatrix}$ es el determinante de la matriz obtenida al eliminar la fila p y la columna q de A, así que

$$\widehat{A}_{p,q} = (-1)^{p+q}\det\left(A^{(1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,n)}_{(1,\ldots,q-1,q+1,\ldots,n)}\right).$$

Observación 3.7. El cofactor de la entrada $\boldsymbol{(i,j)}$ no depende del valor de esta entrada. Por definición, el cofactor de la entrada (i,j) se calcula usando las entradas de A ubicadas en las filas $\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}$ y en las columnas $\{1,\ldots,n\}\setminus\{j\}$. Esto implica que el cofactor **no depende del valor de la entrada** $\boldsymbol{(i,j)}$. Más aún, el cofactor de la entrada (i,j) no depende de la i-ésima fila ni de la j-ésima columna de A. Por ejemplo, las siguientes dos matrices A y B tienen el mismo cofactor $(1,3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & -9 & 5 \\ 7 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}_{1,3} = \widehat{B}_{1,3} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -36,$$

sin embargo $A_{1,3} \neq B_{1,3}$.

3.4. Teorema de expansión del determinante por cofactores

Demostraremos primero dos lemas que servirán para probar el teorema en cuestión.

Lema 3.8. *Sean* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $q \in \{1,\ldots,n\}$. *Supongamos que* $A_{1,k} = 0$ *para todo* $k \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{q\}$. *Entonces*

$$\det(A) = A_{1,q}\widehat{A}_{1,q}.$$

Demostración. Usando $q-1$ transposiciones de columnas, desplacemos el elemento $(1,q)$ a la posición $(1,1)$. Formalmente, consideremos la matriz B que se obtiene de A al aplicar las operaciones elementales:

$$C_q \leftrightarrow C_{q-1} \quad C_{q-1} \leftrightarrow C_{q-2}, \quad \ldots \quad , \quad C_2 \leftrightarrow C_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&B_{*,1} = A_{*,q},\\
&B_{*,k} = A_{*,k-1} \quad \text{cuando } 1 < k \leq q;\\
&B_{*,k} = A_{*,k} \quad \text{cuando } k > q.
\end{aligned}$$

Existen exactamente $(n-1)!$ permutaciones $\varphi \in S_n$ tales que $\varphi(1) = 1$ y $\varphi(i) \neq 1$ si $i > 1$. Entonces nos queda

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\varphi(i)}\\
&= \sum_{\varphi \in S_n,\, \varphi(1)=1} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\varphi(i)} + \sum_{\varphi \in S_n,\, \varphi(1)\neq 1} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\varphi(i)}\\
&= \sum_{\varphi \in S_n,\, \varphi(1)=1} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\varphi(i)} + \sum_{\varphi \in S_n,\, \varphi(1)\neq 1} \operatorname{sgn}(\varphi) B_{1,\varphi(1)} \prod_{i=2}^{n} B_{i,\varphi(i)}
\end{aligned}$$

pero $B_{1,\varphi(1)} = 0$ si $\varphi(1) \neq 1$, por como definimos a B, entonces

$$\sum_{\varphi \in S_n,\, \varphi(1)\neq 1} \operatorname{sgn}(\varphi) B_{1,\varphi(1)} \prod_{i=2}^{n} B_{i,\varphi(i)} = 0,$$

luego tenemos

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\varphi \in S_n,\, \varphi(1)=1} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\varphi(i)}\\
&= \sum_{\varphi \in S_n,\, \varphi(1)=1} \operatorname{sgn}(\varphi) B_{1,1} \prod_{i=2}^{n} B_{i,\varphi(i)}\\
&= B_{1,1} \sum_{\varphi \in S_n,\, \varphi(1)=1} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=2}^{n} B_{i,\varphi(i)}\\
&= B_{1,1} \cdot \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} 2, \dots, n \\ 2, \dots, n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De aquí

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{q-1}\det(B)\\
&= (-1)^{q+1} B_{1,1}\cdot \mathrm{M}_B\begin{pmatrix} 2,\ldots,n \\ 2,\ldots,n \end{pmatrix}\\
&= (-1)^{q+1} A_{1,q}\cdot \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 2,\ldots,n \\ \{1,\ldots,n\}\setminus q \end{pmatrix}\\
&= A_{1,q}\cdot \widehat{A}_{1,q}.
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.9. *Sean* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$*,* $p,q\in\{1,\ldots,n\}$*. Supongamos que* $A_{p,k}=0$ *para todo* $k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{q\}$*. Entonces*

$$\det(A) = A_{p,q}\widehat{A}_{p,q}.$$

Demostración. Usando $p-1$ transposiciones de filas, desplacemos el elemento (p,q) a la posición $(1,q)$. Formalmente, consideremos la matriz B que se obtiene de A al aplicar las operaciones elementales:

$$R_p \leftrightarrow R_{p-1},\quad R_{p-1}\leftrightarrow R_{p-2},\quad \ldots\quad ,\quad R_2\leftrightarrow R_1.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&B_{1,*} = A_{p,*};\\
&B_{k,*} = A_{k-1,*}\quad \text{cuando}\quad 1<k\le p;\\
&B_{k,*} = A_{k,*}\quad \text{cuando}\quad k>p.
\end{aligned}
$$

A la matriz B apliquemos el lema anterior:

$$\det(B) = B_{1,q}(-1)^{q-1}\,\mathrm{M}_B\begin{pmatrix} 2,\ldots,n \\ \{1,\ldots,n\}\setminus\{q\} \end{pmatrix}.$$

Usando que $\det(A)=(-1)^{p-1}\det(B)$, tenemos:

$$\det(A) = A_{p,q}(-1)^{p+q-2}\,\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} \{1,\ldots,n\}\setminus\{p\} \\ \{1,\ldots,n\}\setminus\{q\} \end{pmatrix} = A_{p,q}\widehat{A}_{p,q}.$$

□

Teorema 3.10. *Sean* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,
$p, q \in \{1, \ldots, n\}$. *Entonces:*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k} \widehat{A}_{p,k}; \tag{4}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,q} \widehat{A}_{k,q}. \tag{5}$$

Nota 3.11. La fórmula (4) se llama *expansión del determinante por cofactores a lo largo del p-ésimo renglón.* La fórmula (5) se llama *expansión del determinante por cofactores a lo largo de la q-ésima columna.*

Demostración. Podemos escribir la p-ésima fila de A en forma

$$A_{p,*} = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k} e_k.$$

Donde e_k es el vector fila canónico k-ésimo en $\mathbb{F}^n$. Usemos la linealidad del determinante con respecto a la p-ésima fila:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} \det(A_{1,*}, \ldots, A_{p-1,*}, A_{p,k} e_k, A_{p+1,*}, \ldots, A_{n,*}).$$

A cada sumando apliquemos el lema anterior:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k} \widehat{A}_{p,k}.$$

Se demuestra la fórmula (5) analogamente.

□

Ejemplo 3.12. Para una matriz arbitraria de orden 3×3 expandiendo el determinante sobre la primera fila se tiene:

1.
$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = A_{1,1} \begin{vmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} - A_{1,2} \begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,3} \end{vmatrix} + A_{1,3} \begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{vmatrix}.$$

2. Según la relación anterior:
$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & -12 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= 10(-22) + 11 - 12(-8) = -113.$$

Ejercicio 3.13. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 12 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10 & 0 & 12 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \end{bmatrix}.$$

4. Matriz adjugada clásica

4.1. Definición

Definición 4.1. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, sea

$$\operatorname{adj}(A) \coloneqq \big[\widehat{A}_{j,i}\big]_{i,j=1}^{n}.$$

En otras palabras, la matriz $\operatorname{adj}(A)$ se obtiene de la matriz A al sustituir cada entrada por su cofactor y pasar a la matriz transpuesta. La matriz $\operatorname{adj}(A)$ se llama la *matriz adjugada clásica* de A o la *matriz de cofactores transpuesta*.

Ejemplo 4.2.

1. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$
Entonces la matriz adjunta clásica de A es
$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{1,1} & \widehat{A}_{1,2} & \widehat{A}_{1,3} \\ \widehat{A}_{2,1} & \widehat{A}_{2,2} & \widehat{A}_{2,3} \\ \widehat{A}_{3,1} & \widehat{A}_{3,2} & \widehat{A}_{3,3} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} -3 & -(-16) & 15 \\ -(-6) & -10 & -8 \\ -2 & -(-18) & 10 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 16 & -10 & 18 \\ 15 & -8 & 10 \end{bmatrix}.$$

2. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$
Entonces
$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{1,1} & \widehat{A}_{1,2} & \widehat{A}_{1,3} \\ \widehat{A}_{2,1} & \widehat{A}_{2,2} & \widehat{A}_{2,3} \\ \widehat{A}_{3,1} & \widehat{A}_{3,2} & \widehat{A}_{3,3} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 7 & -2 & -10 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 7 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

4.2. Propiedad principal de la matriz adjugada clásica

Como ejemplo introductorio calcule de los ejemplos anteriores los productos $\operatorname{adj}(A)A$, $A\operatorname{adj}(A)$ y también $\det(A)$. En seguida demostraremos con ayuda del siguiente lema, que se cumple en general la relación

$$\operatorname{adj}(A)A = A\operatorname{adj}(A) = \det(A)\,\mathbf{I}_n\,.$$

Lema 4.3. *Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} A_{p,j} \widehat{A}_{q,j} = 0. \tag{6}$$

Dada una matriz cuadrada arbitraria la suma de las entradas de un renglón multiplicadas por los cofactores correspondientes a las entradas de otro renglón, es igual a 0.

Demostración. Consideremos la matriz auxiliar $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, cuyo q-ésimo renglón es igual al p-ésimo renglón de la matriz A, y todos los demás renglones coinciden con los renglones correspondientes de A:

$$B_{i,j} := \begin{cases} A_{i,j}, & \text{si } i \neq q; \\ A_{p,j}, & \text{si } i = q. \end{cases}$$

Notemos que el cofactor de la forma $\widehat{A}_{q,j}$, $1 \leq j \leq n$, no depende del q-ésimo renglón de A y por lo tanto coincide con $\widehat{B}_{q,j}$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{q,j} &= (-1)^{q+j}\, \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\} \\ \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{q+j}\, \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\} \\ \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\} \end{pmatrix} \\ &= \widehat{B}_{q,j}. \end{aligned}$$

Además, $A_{p,j} = B_{q,j}$. Por eso la suma escrita en el lado izquierdo de (6) es igual a

$$\sum_{j=1}^{n} A_{p,j} \widehat{A}_{q,j} = \sum_{j=1}^{n} B_{q,j} \widehat{B}_{q,j}.$$

Por el teorema de la expansión de una matriz por cofactores, la última suma es igual a $\det(B)$. Pero la matriz B tiene dos renglones iguales: $B_{q,*} = A_{p,*} = B_{p,*}$. Por consecuencia, $\det(B) = 0$.

□

Teorema 4.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces*

$$A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A)\, A = \det(A)\, \boldsymbol{I}_n\,. \tag{7}$$

Demostración. Calculemos la (p,q)-ésima entrada del producto $A\ \mathrm{adj}(A)$:

$$\big(A\ \mathrm{adj}(A)\big)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k}(\mathrm{adj}(A))_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k}\widehat{A}_{q,k}.$$

Vamos a simplificar la última suma. Si $p=q$, aplicamos el teorema sobre la expansión de una matriz por cofactores:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{p,k}\widehat{A}_{p,k} = \det(A).$$

Si $p \neq q$, aplicamos el lema anterior:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{p,k}\widehat{A}_{q,k} = 0.$$

Unimos los dos casos:

$$(A\ \mathrm{adj}(A))_{p,q} = \det(A)\delta_{p,q}.$$

Acabamos de demostrar que $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,\mathbf{I}_n$. La demostración de la igualdad $\mathrm{adj}(A)\,A = \det(A)\,\mathbf{I}_n$ es similar.

□

Ejemplo 4.5. Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -6 & -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Su matriz adjugada clásica está dada por

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 15 & 8 & 12 \\ -10 & -8 & -12 \\ -20 & -4 & -16 \end{bmatrix},$$

y el producto de ambas matrices es

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -6 & -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 8 & 12 \\ -10 & -8 & -12 \\ -20 & -4 & -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix},$$

según el teorema se tendrá que $\det(A) = 20$.

Observación 4.6. En el teorema anterior si A es no singular, entonces multiplicamos (7) por A^{-1} despejamos y obtenemos la relación:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Ejemplo 4.7. Del ejemplo anterior, la matriz inversa está dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 15 & 8 & 12 \\ -10 & -8 & -12 \\ -20 & -4 & -16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4.8.

1. Calcule la matriz adjugada clásica de las siguientes matrices.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Sea $\sigma \in S_n$ y sea

$$A = \left[\delta_{\sigma(i),j}\right]_{i,j=1}^{n}$$

es decir la matriz que se obtiene de la matriz identidad al permutar sus filas según σ, calcule $\operatorname{adj}(A)$.
Sugerencia: Sea

$$B = \left[\delta^{-1}_{\sigma(i),j}\right]_{i,j=1}^{n},$$

determine el producto AB.

5. Matriz de menores

5.1. Notación

Notación 5.1.

1. Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ definimos

$$\mathfrak{I}_{n,k} := \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k : i_r < i_s \text{ si } r < s\}.$$

   De ahora en adelante usaremos este conjunto frecuentemente, y quedará implicito que n y k son naturales con $k \leq n$. Además cada $I \in \mathfrak{I}_{n,k}$ denotará dependiendo del contexto, un conjunto ó una k-tupla.
   Por ejemplo

$$\mathfrak{I}_{4,2} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\};$$

$$\mathfrak{I}_{5,4} = \{(1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,4,5), (1,3,4,5), (2,3,4,5)\}.$$

2. Para cada $I \in \mathfrak{I}_{n,k}$ denotamos a la suma de los elementos de I como $\mathrm{s}(I)$, es decir

$$\mathrm{s}(I) = \sum_{i \in I} i.$$

5.2. Orden lexicográfico

Definición 5.2. Sean $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados, con relaciones de orden $>_1$ y $>_2$ respectivamente. Se define la relación $\prec$ en $A \times B$ como:

para cada $(a,b), (c,d) \in A \times B$, $(a,b) \prec (c,d)$ *si y solo si* $(a >_1 b)$ ó $(a = b$ *y* $c >_2 d)$.

La relación $\prec$ definida anteriormente es una relación de orden a la que llamaremos *orden lexicográfico*. Inductivamente se define para el prodcucto cartesiano de n conjuntos parcialmente ordenados.

Ejemplo 5.3.

1. Según el orden lexicográfico $(3,4,2,5) \prec (3,4,5,1)$, pues en las primeras entradas se tiene $3 = 3$, segundas entradas $4 = 4$ y en las terceras $2 < 5$, no se comparan ya las últimas entradas.

2. En el conjunto $\{(1,3,4), (2,1,3), (2,1,2)\}$ se tienen las relaciones

$$(1,3,4) \prec (2,1,2) \prec (2,1,3).$$

5.3. Definición de matriz de menores

Definición 5.4. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ y $k \leq n, m$. Se define la *k-ésima matriz de menores de A* como la matriz con entradas los menores de A de orden k, ordenados lexicográficamente y se denota por $A^{(k)}$. Formalmente

$$A^{(k)} := \left[\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}\right]_{I\in\mathfrak{I}_{n,k}, J\in\mathfrak{I}_{m,k}},$$

utilizando el orden lexicográfico sobre $\mathfrak{I}_{n,k}$ y $\mathfrak{I}_{m,k}$ para posicionar filas y columnas. Notemos que el tamaño de $A^{(k)}$ es $\binom{n}{k} \times \binom{m}{k}$ pues $|\mathfrak{I}_{n,k}| = \binom{n}{k}$ indica el numero de filas, mientras que $|\mathfrak{I}_{m,k}| = \binom{m}{k}$ indica el número de columnas.

Ejemplo 5.5. Sea A una matriz de orden 3×3, $A^{(2)}$ es de orden $\binom{3}{2} \times \binom{3}{2} = 3 \times 3$.

$$\mathfrak{I}_{3,2} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\},$$

las parejas de este conjunto indicarán la posición de las filas y para el caso de matrices cuadradas como A, también la posición de las columnas, pero antes debemos ordenarlas respecto al orden lexicográfico:

$$(1,2) \prec (1,3) \prec (2,3),$$

en otras palabras la fila 1 de $A^{(2)}$ corresponde a la pareja $(1,2)$, la fila 2 a la pareja $(1,3)$ y la fila 3 a la pareja $(2,3)$, algo similar se tiene para posicionar las columnas. Y así tenemos que

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 13 & 19 & 14 \\ -19 & -17 & -7 \end{bmatrix}.$$

$A^{(1)}$ es de orden $\binom{3}{1}\times\binom{3}{1} = 3\times3$, y tiene como entradas los menores de A de orden 1 que son coinciden con las entradas de A por lo que $A^{(1)} = A$. Por otra parte $A^{(3)} = \binom{3}{3}\times\binom{3}{3} = 1\times1$ y tiene como entrada al único menor de orden 3 de A entonces $A^{(3)} = \det(A)$.

Observación 5.6.

1. Si B es de orden $n \times n$ entonces $B^{(n)} = \det(B)$.
2. $B^{(1)} = B$.
3. $\mathbf{I}_n^{(k)} = \mathbf{I}_{\binom{n}{k}}$.
4. $(\lambda\, \mathbf{I}_n)^{(k)} = \lambda^k\, \mathbf{I}_{\binom{n}{k}}$, para toda $\lambda \in \mathbb{F}$.

Se recomienda al lector que resuelva los siguientes ejercicios para que se familiarice con las matrices de menores.

Ejercicio 5.7.

1. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$
calcule $A^{(2)}$.
2. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$
calcule $A^{(2)}$ y $A^{(3)}$.
3. Para una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, escriba la entrada (I, J) de $(A^{(k)})^\top$.
4. Escriba también la entrada (I, J) de $(A^\top)^{(k)}$.
5. Pruebe que para toda $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple: $(\lambda A)^{(k)} = \lambda^k A^{(k)}$.
6. Si A es una matriz Hermitiana entonces $A^{(k)}$ es Hermitiana.
7. Si A es una matriz anti-Hermitiana de orden par entonces $A^{(k)}$ es Hermitiana.
8. Si A es una matriz anti-Hermitiana de orden impar entonces $A^{(k)}$ es anti-Hermitiana.
9. Sea r el rango de A, entonces $A^{(k)}$ es la matriz cero para toda $k > r$ pero $A^{(r)} \neq 0$.

6. Expansión de Laplace

Enunciaremos el teorema sobre la expansión de Laplace del determinante, ésta es una generalización de la expansión por cofactores. Solo escribiremos un bosquejo de la demostración.

6.1. Complemento algebraico

Definición 6.1. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

Dados $I, J \in \mathfrak{I}_{n,k}$ definimos al *complemento algebraico* del menor $\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$ como el menor correspondiente a las filas $I' = \{1, \dots, n\} \setminus I$ y a las columnas $J' = \{1, \dots, n\} \setminus J$ multiplicado por $(-1)^{\mathrm{s}(I)+\mathrm{s}(J)}$, lo denotaremos por $\widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$. En símbolos,

$$\widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} := (-1)^{\mathrm{s}(I)+\mathrm{s}(J)}\, \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I' \\ J' \end{pmatrix},$$

Si k=n entonces definimos

$$\widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} := 1.$$

Ejemplo 6.2. Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ -2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

El complemento algebraico del menor $\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ es

$$\widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3+2+4}\, \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$

y el complemento algebraico de $\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es

$$\widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3+4+1+2+4}\, \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7.$$

6.2. Fórmula de Laplace para el determinante

Teorema 6.3. *Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $I, J \subset \mathfrak{I}_{n,k}$ entonces*

$$\det(A) = \sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix}; \tag{8}$$

$$\det(A) = \sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} K \\ J \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} K \\ J \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Demostración. Escribiremos un bosquejo de la demostración para la expansión sobre renglones, para una demostración detallada ver [4] ó [5]. Analicemos al menor de la esquina superior izquierda, en este caso
$I = (1, \dots, k)$ y $K = (1, \dots, k)$ luego

$$\mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} = \tag{10}$$

$$(-1)^{s(I)+s(K)} \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{\tau \in S_{n-k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(k),k} A_{\tau(k+1),k+1} \cdots A_{\tau(n),n}. \tag{11}$$

Se tiene que $s(I) + s(K) = 2s(I)$ pues $I = K$ entonces $(-1)^{s(I)+s(K)} = 1$. Consideramos a S_k como el conjunto de las permutaciones de los elementos $1, \dots, k$ y a S_{n-k} como el conjunto de las permutaciones de $k+1, \dots, n$.
Sean $\sigma \in S_k$ y $\tau \in S_{n-k}$ entonces es posible elegir $\rho \in S_n$ tal que restringido a $\{1, \dots, k\}$ es igual a σ mientras que restringido a $\{k+1, \dots, n\}$ es igual a τ, formalmente, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\rho(i) \coloneqq \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \leq k; \\ \tau(i) & \text{si } i > k. \end{cases}$$

entonces

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(k),k} A_{\tau(k+1),k+1} \cdots A_{\tau(n),n} = \operatorname{sgn}(\rho) A_{\rho(1),1} \cdots A_{\rho(n),n}. \tag{12}$$

Vemos que para cada ρ que se escribe en términos de un elemento en S_n y un elemento en S_{n-k}, (12) es un sumando de $\det(A)$, pero sólo tenemos $k!(n-k)!$ sumandos de esta forma, para el menor de la esquina superior izquierda.
Ahora sean $I = (i_1, \dots, i_k)$ y $K = (j_1, \dots, j_k)$, aplicamos $i_1 - 1 + i_2 - 2 + \ldots + i_k - k = i_1 + i_2 - 2 + \ldots + i_k - \frac{(k(k+1))}{2} = s(I) - \frac{(k(k+1))}{2}$ transposiciones de filas y $j_1 - 1 + j_2 - 2 + \ldots + j_k - k = j_1 + i_2 - 2 + \ldots + j_k - \frac{(k(k+1))}{2} = s(J) - \frac{(k(k+1))}{2}$ transposiciones de columnas para mover a la submatriz (I, K) de A a la esquina superior izquierda, llamemos B a la matriz que resulta de A al aplicar estas transposiciones, se tiene pues que

$$\det(B) = (-1)^{s(I)+s(K)-k(k+1)} \det(A) = (-1)^{s(I)+s(K)} \det(A). \tag{13}$$

Al realizar tales transposiciones también hemos posicionado a la submatriz (I', K') de A en la esquina inferior derecha y este caso es similar al que analizamos primero. Obtendremos $k!(n-k)!$ sumandos de $\det(B)$ que varían de los de $\det(A)$ en un factor de $(-1)^{s(I)+s(K)}$, factor que corresponde al complemento algebraico del menor $\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix}$. Finalmente se obtienen $k!(n-k)!$ sumandos de $\det(A)$ para cada menor, si fijamos $I \in \mathfrak{I}_{n,k}$ obtenemos para cada $K \in \mathfrak{I}_{n,k}$ un menor $\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix}$ teniendo en total $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ menores que al multiplicarlos cada uno por su complemento algebraico dan un total de $k!(n-k)!\frac{n!}{(n-k)!k!} = n!$ sumandos de $\det(A)$ distintos por lo que

$$\sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} = \det(A). \qquad \square$$

Nota 6.4. Llamaremos a (8) la expansión de Laplace sobre las filas con índices en I, y a (9) la expansión de Laplace sobre las columnas con índices en J.

Ejemplo 6.5.

1. Para una matriz de orden 4×4 por la expansión de Laplace sobre las primeras 2, reducimos el determinante a sumas de productos de determinantes de orden 2:

$$\det\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix} =$$

$$\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} +$$

$$\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} -$$

$$\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned}\det(A) =& \det\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & + \det\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ & - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\ =& 48 + 16 - 32 - 2 - 84 - 10 = -64.\end{aligned}$$

2. Expandiendo sobre las primeras dos columnas se tiene

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & -6 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= -13(127) = -1651.\end{aligned}$$

3. Expandiendo sobre las filas 2 y 5

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 & d & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Corolario 6.6. *Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ entonces*

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{m,n} & C \end{bmatrix} = \det(A)\det(C),$$

donde $\mathbf{0}_{m,n}$ es la matriz nula de tamaño $m \times n$.

Demostración. Se aplica el teorema anterior, expandiendo el determinante sobre las primeras n columnas de la matriz definida por bloques.

$\square$

7. Matriz adjugada de menores

En esta sección definiremos la k-ésima matriz adjugada de menores y demostraremos su propiedad principal, propiedad que será útil para la demostración del teorema de Jacobi más adelante.

7.1. Definición de matriz adjugada de menores

Definición 7.1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Denotamos por $\operatorname{adj}^{(k)}(A)$ a la *k-ésima matriz adjugada de menores* de A, que se define de la siguiente manera

$$\operatorname{adj}^{(k)}(A) := \left[\widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} J \\ I \end{pmatrix}\right]_{I,J\in\mathfrak{I}_{n,k}},$$

es decir, es la matriz que se obtiene al sustituir cada entrada de $A^{(k)}$ que en esencia es un menor de A, por su complemento algebraico y después llevarla a la matriz transpuesta.

Ejemplo 7.2. Para una matriz de orden 3, tenemos que

$$\operatorname{adj}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \widehat{\mathrm{M}}_A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{bmatrix}^{\top}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} & -\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & -\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & -\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}^{\top}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} & -\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ -\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & -\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & -\mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathrm{adj}^2(A) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculemos el producto $A^{(2)}\,\mathrm{adj}^{(2)}(A)$:

$$A^{(2)}\,\mathrm{adj}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 20 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & -23 \\ 10 & 16 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix} = \det(A)\,\mathbf{I}_3\,.$$

Esto es resultado de la formula de Laplace. Se demostrará adelante que se cumple en general la igualdad anterior.

7.2. Propiedad principal de la matriz adjugada de menores

Lema 7.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $I, J \in \mathfrak{I}_{n,k}$ tales que $I \neq J$ entonces se cumple lo siguiente:*

$$\sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = 0;$$

$$\sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} K \\ J \end{pmatrix} = 0.$$

Demostración. Escribamos a I y J como k-tuplas, $I = (i_1, \ldots, i_k)$ y $J = (j_1, \ldots, j_k)$. Definimos a la matriz B de la siguiente manera:

$$B_{p,q} := \begin{cases} A_{p,q} & \text{si } p \notin J; \\ A_{i_l,q} & \text{si } p = j_l. \end{cases}$$

Las submatrices B_K^J y A_K^I son iguales para toda $K \in \mathfrak{I}_{n,k}$ por la manera en que definimos a B, entonces

$$\mathrm{M}_B \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = \det(B_K^J) = \det(A_K^I) = \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

También por definición B coincide con A en las filas con índices ajenos a J, es decir, si $p \notin J$ entonces $B_{p,*} = A_{p,*}$. Recordemos que $J' = \{1, \ldots, n\} \setminus J$, tendremos pues que $B_{K'}^{J'}$ y $A_{K'}^{J'}$ son iguales para toda $K \in \mathfrak{I}_{n,k}$, luego

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{M}}_B \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} &= (-1)^{\mathrm{s}(J)+\mathrm{s}(K)} \, \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} J' \\ K' \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{\mathrm{s}(J)+\mathrm{s}(K)} \det(B_{K'}^{J'}) \\
&= (-1)^{\mathrm{s}(J)+\mathrm{s}(K)} \det(A_{K'}^{J'}) \\
&= (-1)^{\mathrm{s}(J)+\mathrm{s}(K)} \, \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} J' \\ K' \end{pmatrix} \\
&= \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

para toda $K \in \mathfrak{I}_{n,k}$. De (14) y lo anterior obtenemos

$$\sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = \sum_{K \in I_n^k} \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_B \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = \det(B). \tag{15}$$

Como $I \neq J$ existe $r \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $i_r \notin J$ pero se tiene que

$$B_{i_r,*} = A_{i_r,*},$$

y además

$$B_{j_r,*} = A_{i_r,*}$$

es decir la matriz B tiene al menos dos filas iguales por lo que $\det(B) = 0$. Finalmente de esto y de (15) concluimos que

$$\sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = 0. \qquad \square$$

Teorema 7.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ entonces*

$$\mathrm{adj}^{(k)}(A) A^{(k)} = A^{(k)} \, \mathrm{adj}^{(k)}(A) = \det(A) \, \boldsymbol{I}_{\binom{n}{k}} . \tag{16}$$

Demostración. Sean $I, J \in \mathfrak{I}_{n,k}$, la (I, J)-ésima entrada de $A^{(k)}(\mathrm{adj}^{(k)}(A))$ es

$$\left(A^{(k)}(\mathrm{adj}^{(k)}(A))\right) =_{I,J}= \sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \left[A^{(k)}\right]_{I,K} \left[\mathrm{adj}^{(k)}(A)\right]_{K,J} = \sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix}$$

Del lema anterior se tiene que si $I \neq J$

$$\sum_{K \in \mathfrak{I}_{n,k}} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = 0.$$

Si $I = J$, entonces de la expansión de Laplace sobre las filas con índices en I se sigue que

$$\sum_{K \in I_n^k} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = \det(A).$$

Juntando ambos casos tenemos que

$$\left[A^{(k)}(\mathrm{adj}^{(k)}(A))\right]_{I,J} = \det(A)\delta_{I,J},$$

es decir $A^{(k)} \operatorname{adj}^{(k)}(A) = \det(A)\, \mathbf{I}_{\binom{n}{k}}$, la igualdad $\operatorname{adj}^{(k)}(A)A^{(k)} = \det(A)\, \mathbf{I}_{\binom{n}{k}}$ se demuestra de manera similar.

$\square$

Ejercicio 7.5.

1. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$
calcule $\operatorname{adj}^{(2)}(A)$.

2. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. A partir de la siguiente relación:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & A \\ \mathbf{0}_{n,n} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{n,n} \\ -\mathbf{I}_n & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,n} & AB \\ -\mathbf{I}_n & B \end{bmatrix},$$
demuestre que
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3. Del ejercicio anterior deduzca que si A es no singular entonces:
$$\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

4. Dada una matriz cuadrada arbitraria A, podemos ver a su determinante como un polinomio con las entradas de la matriz como sus variables, por ejemplo, si A es de orden 2 entonces
$$\det(A) = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1},$$

puede ser visto como un polinomio en las variables $A_{1,1}, A_{2,2}, A_{1,2}, A_{2,1}$ y en este caso el grado del polinomio será 4, en general para una matriz de tamaño $n \times n$ el grado será n.
Visto de esta forma, demuestre que el determinante es un polinomio primo, es decir, que no existen polinomios de grado ≥ 1 que lo dividan.
Sugerencia: demuestre por reducción al absurdo y utilice la definición de determinante.

5. (Teorema de Sylvester sobre matrices de menores) Utilizando el ejercicio anterior y la propiedad principal de la k-ésima matriz adjugada de menores, demuestre que:

$$\det(A^{(k)}) = \det(A)^{\binom{n-1}{k-1}};$$

$$\det(\operatorname{adj}^{(k)}(A)) = \det(A)^{\binom{n-1}{k}}.$$

8. Producto de matrices rectangulares

8.1. Teorema de Binet–Cauchy clásico

Observación 8.1. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ con $m < n$ tenemos que el producto AB es de orden $n \times n$ mientras que su rango es menor estricto que m, entonces

$$\det(AB) = 0.$$

Sea $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{I}_{m,n}$ entonces $i_1 < i_2 <, \ldots, < i_n$. Sea $\sigma \in S_n$ tenemos que las entradas de $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(n)})$ son distintas a pares, aunque no necesariamente están en orden ascendiente, ya que son una permutación de $(i_1, \ldots, i_n)$. En base a esto particionamos a $\{1, \ldots, m\}^n$ en el conjunto de n-tuplas que son permutación de algún elemento de $\mathfrak{I}_{m,n}$ y el conjunto de las n-tuplas que tienen al menos dos entradas iguales. El siguiente lema formaliza esta idea.

Lema 8.2. *Sean $n \leq m$, definimos el conjunto*

$$\mathfrak{Z} \coloneqq \{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, m\}^n : \exists p, q \in \{1, \ldots, n\}, i_p = i_q, p \neq q\},$$

entonces

1.
$$\bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{I}_{m,n}} \left(\bigcup_{\sigma\in S_n} \{(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(n)})\} \right) \cap \mathfrak{Z} = \emptyset; \tag{17}$$

2.
$$\{1, \ldots, m\}^n = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{I}_{m,n}} \left(\bigcup_{\sigma\in S_n} \{(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(n)})\} \right) \cup \mathfrak{Z}. \tag{18}$$

Demostración. Con lo siguiente habremos demostrado que los conjuntos mencionados forman una partición de $\{1, \ldots, m\}^n$.

1. Es claro, pues en $\mathfrak{Z}$ las n-tuplas tienen al menos dos entradas iguales, mientras que en el otro conjunto las n-tuplas siempre tienen sus entradas distintas a pares.
2. Se tiene ya la contención $\supseteq$. Sea $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, m\}^n$. Si I tiene al menos dos entradas iguales entonces se encuentra en $\mathfrak{Z}$, supongamos entonces que sus entradas son distintas a pares y sea $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathfrak{I}_{m,n}$ la n-tupla

con las entradas de I en orden ascendiente, J es una permutación I pues es un reordenamiento, entonces existe una biyección $\sigma \in S_n$ tal que

$$(j_{\sigma(1)}, \ldots, j_{\sigma(n)}) = (i_1, \ldots, i_n),$$

de donde se sigue la otra contención.

$\square$

Teorema 8.3. *Sean $n \leq m$, $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces*

$$\det(AB) = \sum_{J\in\mathfrak{I}_{n,m}} \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ & J & \end{pmatrix} \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} & J & \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Demostración. Por la linealidad del determinante respecto a la primera columna se tiene que

$$\det(AB) = \det \begin{bmatrix} \sum_{i_1=1}^m A_{1,i_1}B_{i_1,1} & \sum_{i_2=1}^m A_{1,i_2}B_{i_2,2} & \ldots & \sum_{i_1=1}^m A_{1,i_n}B_{i_n,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_1=1}^m A_{n,i_1}B_{i_1,1} & \sum_{i_2=1}^m A_{n,i_2}B_{i_2,2} & \ldots & \sum_{i_1=1}^m A_{n,i_n}B_{i_n,n} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i_1=1}^m \det \begin{bmatrix} A_{1,i_1}B_{i_1,1} & \sum_{i_2=1}^m A_{1,i_2}B_{i_2,2} & \ldots & \sum_{i_1=1}^m A_{1,i_n}B_{i_n,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,i_1}B_{i_1,1} & \sum_{i_2=1}^m A_{n,i_2}B_{i_2,2} & \ldots & \sum_{i_1=1}^m A_{n,i_n}B_{i_n,n} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i_1=1}^m \det \begin{bmatrix} A_{1,i_1} & \sum_{i_2=1}^m A_{1,i_2}B_{i_2,2} & \ldots & \sum_{i_1=1}^m A_{1,i_n}B_{i_n,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,i_1} & \sum_{i_2=1}^m A_{n,i_2}B_{i_2,2} & \ldots & \sum_{i_1=1}^m A_{n,i_n}B_{i_n,n} \end{bmatrix} B_{i_1,1},$$

aplicamos ahora la linealidad a cada una de las columnas restantes:

$$\det(AB) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,m\}^n} \det \begin{bmatrix} A_{1,i_1} & \ldots & A_{1,i_n}B_{i_n,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,i_1} & \ldots & A_{n,i_n}B_{i_n,n} \end{bmatrix} B_{i_1,1}$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,m\}^n} \det \begin{bmatrix} A_{1,i_1} & \ldots & A_{1,i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,i_1} & \ldots & A_{n,i_n} \end{bmatrix} B_{i_1,1} \cdots B_{i_n,n}$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,m\}^n} \det(A_{(i_1,\ldots,i_n)}) B_{i_1,1} \cdots B_{i_n,n}. \tag{19}$$

retomando la igualdad (19) y la partición mencionada obtenemos

$$\det(AB) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,m\}^n} \det(A_{(i_1,\ldots,i_n)})B_{i_1,1}\cdots B_{i_n,n}$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{I}_{m,n}} \sum_{\sigma\in S_n} \det(A_{(i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n)})})B_{i_{\sigma(1)},1}\cdots B_{\sigma(n),n} + \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{Z}} \det(A_{(i_1,\ldots,i_n)})B_{i_1,1}\cdots B_{i_n,n}. \tag{20}$$

Sabemos que $A_{(i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n)})}$ es la matriz que se obtiene de $A_{(i_1,\ldots,i_n)}$ al permutar las columnas respecto a σ entonces usamos la proposición (2.4) y obtenemos

$$\det(A_{(i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n)})}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A_{(i_1,\ldots,i_n)}), \tag{21}$$

y si $(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{Z}$ entonces $A_{(i_1,\ldots,i_n)}$ tiene dos columnas iguales por lo que

$$\det(A_{(i_1,\ldots,i_n)}) = 0. \tag{22}$$

Por (22) el segundo sumando en (20) se anula y sustituyendo (21) nos queda

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{I}_{m,n}} \sum_{\sigma\in S_n} \det(A_{(i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n)})})B_{i_{\sigma(1)},1}\cdots B_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{I}_{m,n}} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A_{(i_1,\ldots,i_n)})B_{i_{\sigma(1)},1}\cdots B_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{I}_{m,n}} \det(A_{(i_1,\ldots,i_n)}) \left(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{n} B_{i_{\sigma(j)},j}\right) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{I}_{m,n}} \det(A_{(i_1,\ldots,i_n)})\det(B^{(i_1,\ldots,i_n)}) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{I}_{m,n}} \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \mathrm{M}_B\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 8.4. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -6 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

por el teorema de Binet–Cauchy tenemos

$$
\begin{aligned}
\det(AB) = & \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} + \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \\
& \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \\
& \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \mathrm{M}_A \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{M}_B \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\
= & 60 - 132 + 60 + 414 + 240 + 112 = 754.
\end{aligned}
$$

8.2. Teorema de Binet–Cauchy para matrices de menores

Proposición 8.5. *Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ dos matrices y sean $I, J \in \mathfrak{I}_{n,k}$ entonces la submatriz (I, J) de AB es igual al producto de la submatriz de A correspondiente a las filas con índices en I y columnas con índices en $\{1, \ldots, m\}$, y la submatriz de B correspondiente a las filas con índices en $\{1, \ldots, m\}$ y columnas con índices en J, es decir:*

$$(AB)_J^I = A^I B_J.$$

Demostración. En efecto, sabemos que cada fila de AB es igual al producto de una fila de A por la matriz B, de manera precisa, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene

$$(AB)_{i,*} = A_{i,*}B,$$

esto implica que

$$(AB)^I = A^I B,$$

algo similar ocurre con las columnas así que

$$(AB)_J = AB_J.$$

Y por lo tanto tenemos

$$(AB)_J^I = ((AB)^I)_J = (A^I B)_J = A^I B_J. \qquad \square$$

Teorema 8.6. *Sean* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ *y* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$*, sea* $k \leq \min\{n,m\}$ *entonces*

$$(AB)^{(k)} = A^{(k)}B^{(k)}.$$

Demostración. Sean $I, J \in \mathfrak{I}_{n,k}$, calculemos la (I,J)-ésima entrada de la matriz $(AB)^{(k)}$. Esta entrada es el determinante de la submatriz (I,J) de AB,

$$\left((AB)^{(k)}\right)_{I,J} = \mathrm{M}_{AB}\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} = \det((AB)^I_J).$$

Por la observación anterior se tiene

$$\det((AB)^I_J) = \det(A^I B_J).$$

Del teorema de Binet–Cauchy clásico se sigue que

$$\begin{aligned}
\det(A^I B_J) &= \sum_{K\in\mathfrak{I}_{m,k}} \mathrm{M}_{A^I}\begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ & K & \end{pmatrix}\mathrm{M}_{B_J}\begin{pmatrix} & K & \\ 1 & \dots & k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{K\in\mathfrak{I}_{m,k}} \det((A^I)^{(1,\dots,k)}_K)\det((B_J)^K_{(1,\dots,k)}) \\
&= \sum_{K\in\mathfrak{I}_{m,k}} \det((A^I_K)^{(1,\dots,k)})\det((B^K_J)_{(1,\dots,k)}), \qquad (23)
\end{aligned}$$

como A^I_K tiene k filas y B^K_J tiene k columnas, tenemos las igualdades $(A^I_K)^{(1,\dots,k)} = A^I_K$ y $(B^K_J)_{(1,\dots,k)} = B^K_J$, sustituimos en (23)

$$\det(A^I B_J) = \sum_{K\in\mathfrak{I}_{m,k}} \det(A^I_K)\det(B^K_J) = \sum_{K\in\mathfrak{I}_{m,k}} \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix}\mathrm{M}_B\begin{pmatrix} K \\ J \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Ahora calculemos el producto $A^{(k)}B^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
A^{(k)}B^{(k)} &= \left[A^{(k)}\right]_{I\in\mathfrak{I}_{n,k},P\in\mathfrak{I}_{m,k}}\left[B^{(k)}\right]_{Q\in\mathfrak{I}_{m,k}J\in\mathfrak{I}_{n,k}} \\
&= \Big[\sum_{K\in\mathfrak{I}_{m,k}} \left[A^{(k)}\right]_{I,K}\left[B^{(k)}\right]_{K,J}\Big]_{I,J\in\mathfrak{I}_{n,k}} \\
&= \Big[\sum_{K\in\mathfrak{I}_{m,k}} \mathrm{M}_A\begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix}\mathrm{M}_B\begin{pmatrix} K \\ J \end{pmatrix}\Big]_{I,J\in\mathfrak{I}_{n,k}}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

De (24) y (25) se concluye el resultado.

□

Ejemplo 8.7. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -6 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$(AB)^{(1)} = AB = A^{(1)}B^{(1)};$$

luego

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

de lo cual se sigue que

$$(AB)^{(2)} = A^{(2)}B^{(2)} = \begin{bmatrix} -9 & 27 & 0 \\ -8 & 24 & 0 \\ -7 & 21 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos que $(AB)^{(3)} = \det(AB) = 0$ pues el rango del producto es menor o igual que el rango de A que es 2, sin embargo no tienen sentido $A^{(3)}$ ni $B^{(3)}$ ya que no están definidas.

Ejercicio 8.8.

1. Identidad de Binet–Cauchy.
   Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}^n$, demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j c_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k d_k\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j d_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j).$$

2. Identidad de Lagrange.
   Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$, demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

3. Identidad de Lagrange con números complejos y valores absolutos.
   Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$, demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right) - \left|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}\right|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} |a_j b_k - a_k b_j|^2.$$

4. Desigualdad de Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz para sucesiones cuadrado integrables.
   Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j < +\infty, \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j < +\infty.$$

   Demuestre que la serie

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \overline{b_j} < +\infty,$$

   converge absolutamente y que se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \overline{b_j}\right|^2 \leq \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2\right) \left(\sum_{j\in\mathbb{N}}^{n} |b_j|^2\right).$$

9. Teorema de Jacobi

Teorema 9.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ entonces*

$$(\operatorname{adj}(A))^{(k)} = \det(A)^{k-1} \operatorname{adj}^{(k)}(A).$$

Originalmente el teorema de Jacobi se expresa en términos de menores como a continuación:
Para toda pareja $I, J \in \mathfrak{I}_{n,k}$ se cumple

$$\mathrm{M}_{\operatorname{adj}(A)} \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} = \det(A)^{k-1} \widehat{\mathrm{M}}_A \begin{pmatrix} J \\ I \end{pmatrix}.$$

Nota 9.2. Recordemos que $(\operatorname{adj}(A))^{(k)}$ es la *k-ésima matriz de menores de* $\operatorname{adj}(A)$ mientras que $\operatorname{adj}^{(k)}(A)$ es la *k-ésima matriz adjugada de menores de A.*

Demostración. Abordaremos la demostración en distintos casos:

1. $k = 1$.
   Por convención establecemos $\det(A)^{k-1} = 1$, y se tiene que

   $$(\operatorname{adj}(A))^{(k)} = \operatorname{adj}(A) = \det(A)^{k-1} \operatorname{adj}^{(k)}(A).$$

2. $k > 1$.

   a) Supongamos que A es no singular.
   La k-ésima matriz de menores de $A \operatorname{adj}(A) = \det(A)\, \mathbf{I}_n$ es

   $$(A \operatorname{adj}(A))^{(k)} = (\det(A)\, \mathbf{I}_n)^{(k)} = \det(A)^k\, \mathbf{I}_{\binom{n}{k}},$$

   aplicamos el teorema de Binet-Cauchy para menores a la igualdad anterior

   $$A^{(k)}(\operatorname{adj}(A))^{(k)} = \det(A)^k\, \mathbf{I}_{\binom{n}{k}}\,. \tag{26}$$

   Por la propiedad principal de la matriz adjugada de menores tenemos que

   $$\operatorname{adj}^{(k)}(A) A^{(k)} = \det(A)\, \mathbf{I}_{\binom{n}{k}}\,. \tag{27}$$

   Multiplicamos (26) por $\operatorname{adj}^{(k)}(A)$ a la izquierda

   $$\operatorname{adj}^{(k)}(A) A^{(k)}(\operatorname{adj}(A))^{(k)} = \operatorname{adj}^{(k)}(A) \det(A)^k\, \mathbf{I}_{\binom{n}{k}},$$

   sustituyendo (27) en el lado izquierdo de la expresión anterior obtenemos

   $$\det(A)(\operatorname{adj}(A))^{(k)} = \det(A)^k \operatorname{adj}^{(k)}(A),$$

   como A es no singular despejamos $\det(A)$ y finalmente

   $$(\operatorname{adj}(A))^{(k)} = \det(A)^{k-1} \operatorname{adj}^{(k)}(A). \tag{28}$$

b) Ahora supongamos que A es singular. Mostremos que la k-esima matriz de menores de la matriz adjunta de A es nula, analicemos los siguientes dos casos:

1) $\operatorname{rank}(A) < n-1$.
Se tiene que $\widehat{A}_{i,j} = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, pues cada cofactor es el determinante de una submatriz de A de orden $n-1$, luego

$$(\operatorname{adj}(A))^{(k)} = \mathbf{0}_{\binom{n}{k}}.$$

2) $\operatorname{rank}(A) = n-1$.
Tenemos que

$$A \operatorname{adj}(A) = \mathbf{0}_n,$$

entonces la imagen de $\operatorname{adj}(A)$ está contenida en el núcleo de A, en otras palabras

$$\operatorname{Im}(\operatorname{adj}(A)) \subseteq \ker(A),$$

de esto se sigue que

$$\operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) \leq \operatorname{nul}(A),$$

donde $\operatorname{nul}(A)$ es la dimensión del núcleo de A. El hecho

$$\operatorname{nul}(A) + \operatorname{rank}(A) = n,$$

implica que $\operatorname{nul}(A) = 1$, entonces

$$\operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) \leq 1,$$

y como estamos considerando $k > 1$, los menores de orden k de la matriz $\operatorname{adj}(A)$ son iguales a 0. Concluimos que

$$(\operatorname{adj}(A))^{(k)} = \mathbf{0}_{\binom{n}{k}}.$$

Por lo tanto para matrices singulares se tiene que

$$(\operatorname{adj}(A))^{(k)} = \mathbf{0}_{\binom{n}{k}} = \det(A)^{k-1} \operatorname{adj}^{(k)}(A). \tag{29}$$

Con (28) y (29) se tiene demostrado el resulatado para $k > 1$, y así concluimos la prueba.

□

Referencias

[1] A.C. Aitken, *Determinants and matrices*, Greenwood Press, 1946, pp. 1–98

[2] J.H.M. Wedderburn, *Lectures on matrices*, American Mathematical Society, 1934, pp. 63–67.

[3] D.L. Boutin, R.F. Gleeson, R.M. Williams, *Wedge theory, compound matrices: theory and applications*, 1996, pp. 2–14.

[4] P.B. Bhattacharya, S.K. Jain, S.R. Nagpaul, *First course in linear algebra*, New Age International, 1983, pp. 103–104.
ISBN 0-85226-062-8.

[5] Milan Janjic, *A proof of generealized Laplace's expansion theorem*, Bull. Soc. Math. Banja Luka, Vol. 15, 2008, pp. 5–7.
ISSN 0354-5792.
`http://www.imvibl.org/imvibl/buletin/bultetin_15_2008/buletin_15_2008_5_7.pdf`