El operador de multiplicación (Parte 2)

Los operadores de multiplicación en espacios de medida σ–finita

Gerardo Ramos Vázquez

CINVESTAV del IPN

Seminario de matrices y operadores

3 de mayo de 2018

Contenido

- Preliminares
  - Matrices diagonales
  - Operador de multiplicación en $\mathbb{C}^n$ y $\ell^2(\mathbb{N}_0)$
  - Espacios de medida σ–finita
  - El rango esencial de una función
- Operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$
  - Aritmética de operadores de multiplicación
  - Norma
  - Un álgebra C^*
  - Criterio de invertibilidad
  - Espectro
- Dos teoremas sobre operadores de multiplicación

Matrices diagonales

Sea $a \in \mathbb{C}^n$ (símbolo), definimos $\operatorname{diag}(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ como

$$\operatorname{diag}(a) := [\, a_j \delta_{j,k} \,]_{j,k=1}^{n}$$

☛ ej.

Propiedades generales:

- ✏ $\operatorname{diag}(a) + \operatorname{diag}(b) = \operatorname{diag}(a+b)$
- ✏ $\lambda \operatorname{diag}(a) = \operatorname{diag}(\lambda a)$
- ✏ $\operatorname{diag}(a) \operatorname{diag}(b) = \operatorname{diag}(a \odot b)$
- ✏ $\operatorname{diag}(a)^* = \operatorname{diag}(\overline{a})$
- ✏ $\mathbf{Sp}(\operatorname{diag}(a)) = \{\, a_j \;:\; j = 1, 2, \ldots, n \,\}$

Operador de multiplicación en $\mathbb{C}^n$

$$(a \in \mathbb{C}^n) \qquad M_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

$$\boxed{M_a x := \operatorname{diag}(a)\, x}$$

Obs: $M_a x = a \odot x$

Propiedades generales:

- ✏ $M_a + M_b = M_{a+b}$
- ✏ $\lambda M_a = M_{\lambda a}$
- ✏ $M_a M_b = M_{a \odot b}$
- ✏ $M_a^* = M_{\overline{a}}$
- ➸ $\| M_a \| = \| a \|_\infty$
- ➸ $\mathbf{Sp}(M_a) = \mathrm{R}(a)$

☛ M_a es **invertible** ssi $(\forall\, j)\; a_j \neq 0$.

Operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

$(a \in \ell^\infty(\mathbb{N}_0)) \qquad M_a : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$

$$\boxed{M_a x := a \odot x}$$

Propiedades generales:

- ✏ $M_a + M_b = M_{a+b}$
- ✏ $\lambda M_a = M_{\lambda a}$
- ✏ $M_a M_b = M_{a \odot b}$
- ✏ $M_a^* = M_{\overline{a}}$
- ➼ $\| M_a \| = \| a \|_\infty$
- ➼ $\mathbf{Sp}(M_a) = \operatorname{clos} \mathrm{R}(a)$

☛ M_a es **invertible** ssi $0 \notin \operatorname{clos} \mathrm{R}(a)$.

Espacio de medida

- X un conjunto no vacío
- $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ una σ–álgebra de subconjuntos de X
  - $X \in \mathcal{F}$
  - $\mathcal{F}$ cerrado bajo **complementos** y **uniones numerables**
- $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ una medida en X
  - $\mu(\varnothing) = 0$
  - $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ con A_k's disjuntos a pares

Notación: $(X, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow (X, \mu)$

Espacio de medida σ–finita

es un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$
donde existe $(E_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tal que

➙ $(\forall\, k) \quad \mu(E_k) < +\infty$

➙ $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

Obs: los E_k's pueden elegirse disjuntos a pares

ej:

✓ $\mathbb{R}$ con medida de Lebesgue

✓ $\mathbb{N}$ con medida de conteo

✓ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad

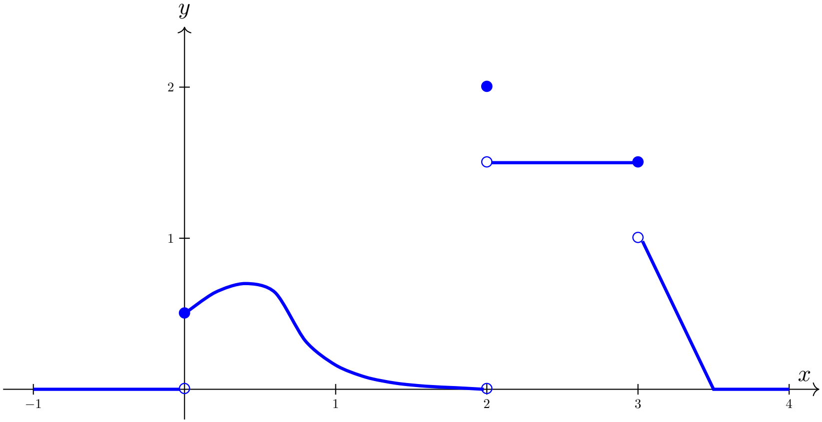
✘ $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = 2^X$, $\mu(\{0\}) = 1$, $\mu(\{1\}) = +\infty$

✘ $\mathbb{R}$ con medida $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \#(A) \leq \aleph_0 \\ +\infty & \#(A) > \aleph_0 \end{cases}$

Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

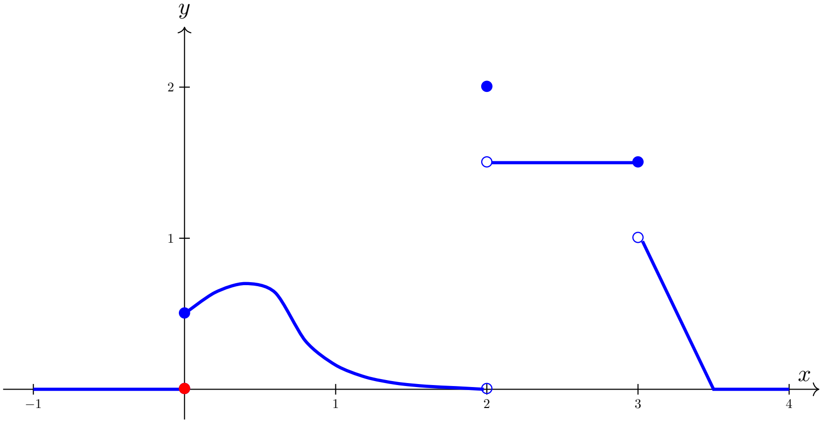
$$\mathcal{R}(f) := \left\{\, z \in \mathbb{C} \,:\, (\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon))) > 0 \,\right\}$$



Rango esencial

Sea $({\color{red}X}, {\color{magenta}\mu})$ un espacio de medida y ${\color{blue}f} : {\color{red}X} \to \mathbb{C}$ una función medible

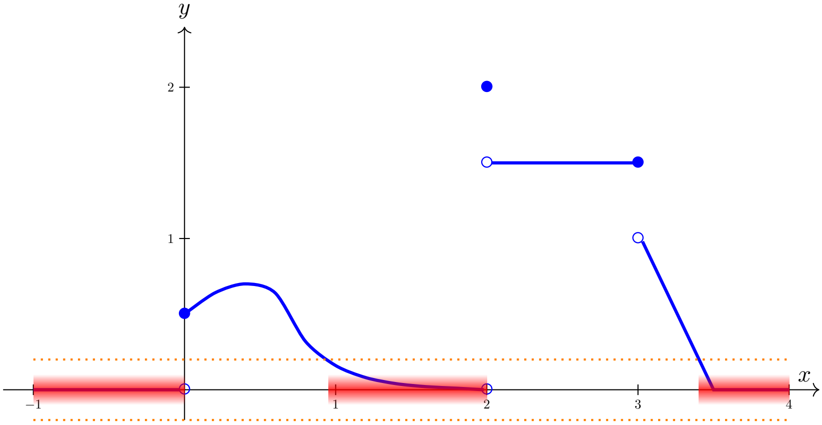
$$\mathcal{R}({\color{blue}f}) := \left\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; (\forall\, \varepsilon > 0) \quad {\color{magenta}\mu}({\color{blue}f}^{-1}(B(z,\varepsilon))) > 0 \,\right\}$$



Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

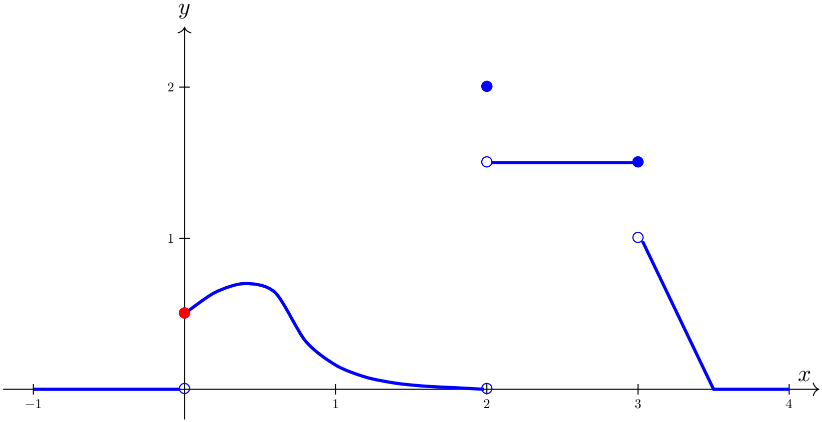
$$\mathcal{R}(f) := \left\{ \, z \in \mathbb{C} \; : \; (\forall \, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon))) > 0 \, \right\}$$



Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

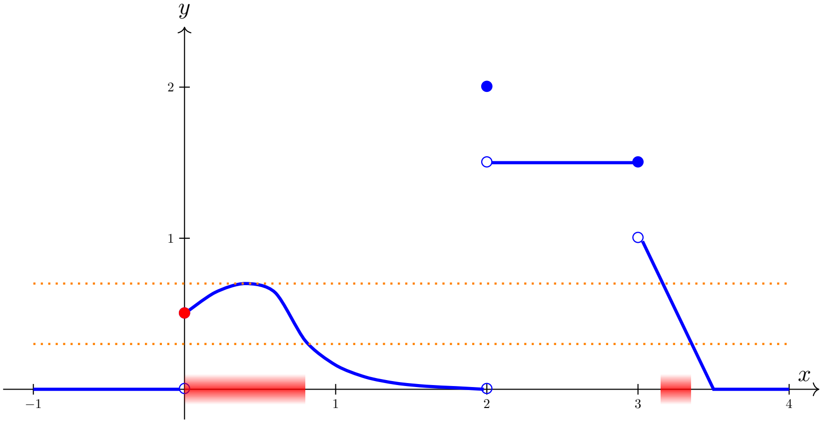
$$\mathcal{R}(f) := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, (\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z,\varepsilon))) > 0 \right\}$$



Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

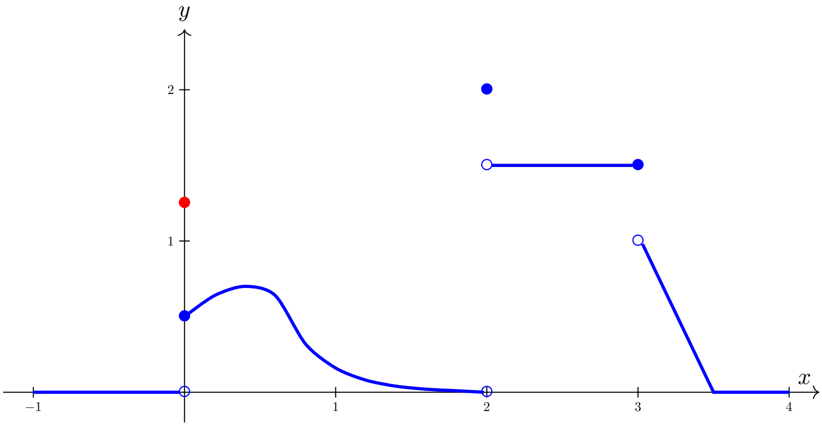
$$\mathcal{R}(f) := \left\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; (\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z,\varepsilon))) > 0 \,\right\}$$



Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

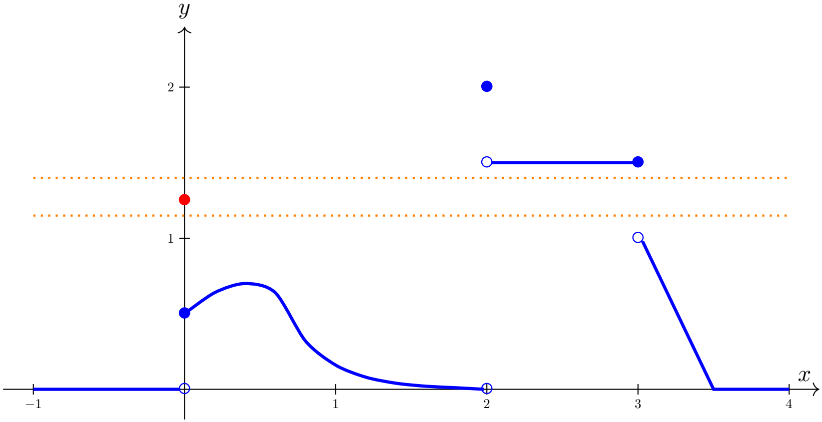
$$\mathcal{R}(f) := \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; (\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z,\varepsilon))) > 0 \,\}$$



Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

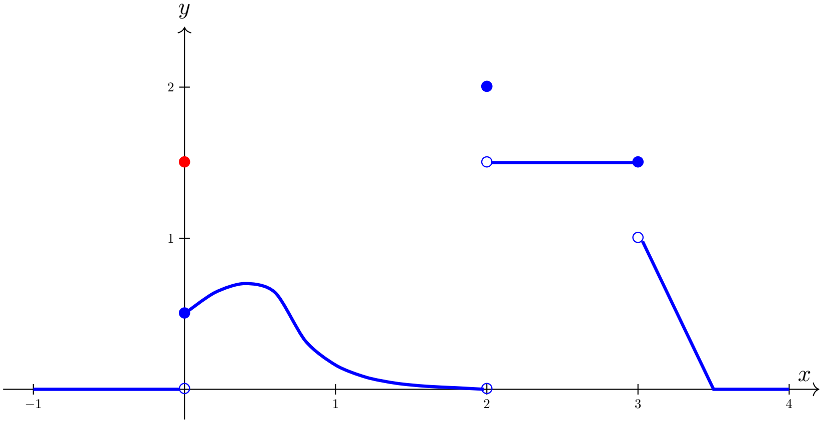
$$\mathcal{R}(f) := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, (\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z,\varepsilon))) > 0 \,\}$$



Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

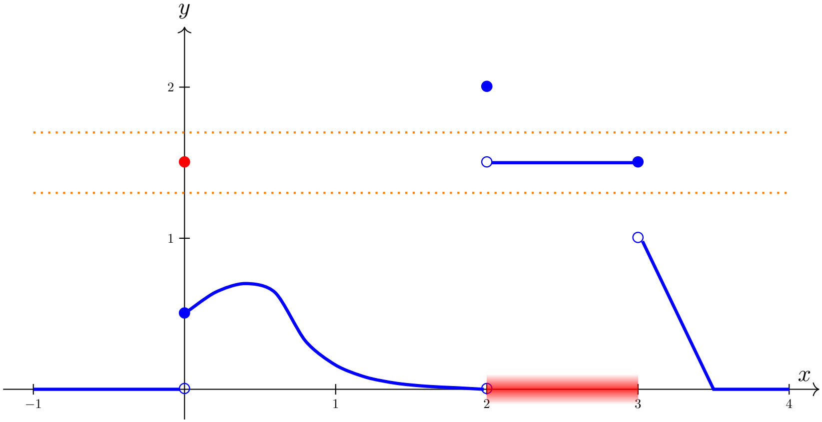
$$\mathcal{R}(f) := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, (\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon))) > 0 \,\}$$



Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

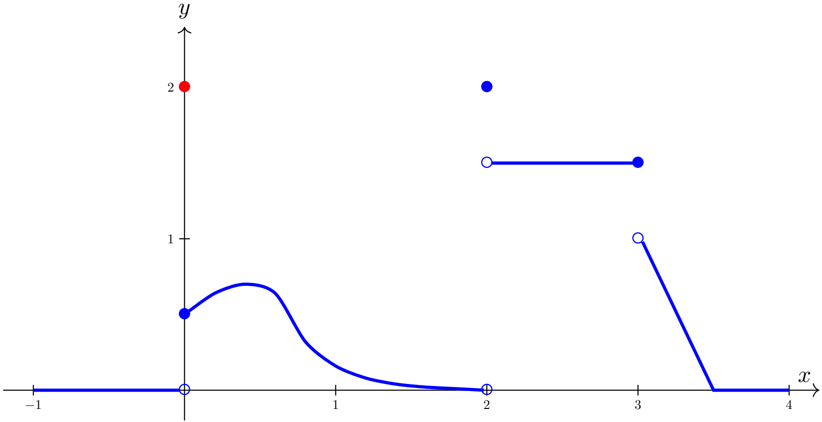
$$\mathcal{R}(f) := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, (\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon))) > 0 \right\}$$



Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

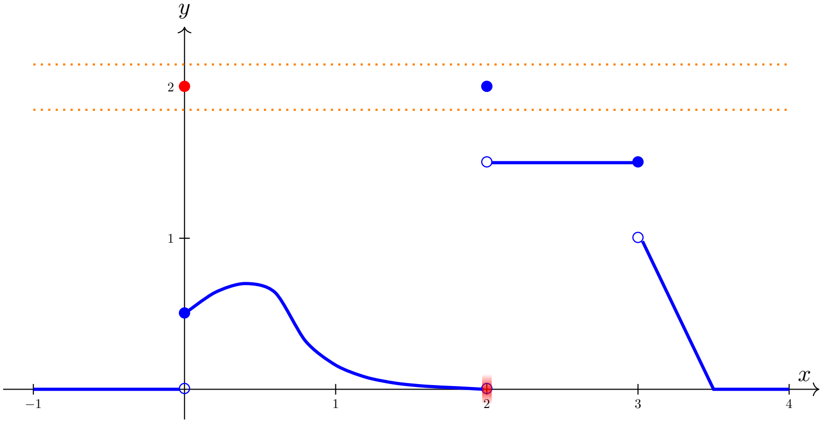
$$\mathcal{R}(f) := \left\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; (\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon))) > 0 \,\right\}$$



Rango esencial

Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible

$$\mathcal{R}(f) := \left\{\, z \in \mathbb{C} \,:\, (\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon))) > 0 \,\right\}$$



Propiedades del rango esencial

- ☛ $\mathcal{R}(f)$ es cerrado
- ☛ $f(x) \in \mathcal{R}(f) \quad \mu$–c.t.p.
- ☛ $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$
- ☛ $\mathcal{R}(f) \subseteq \operatorname{clos}(f(X))$

✍ Si X es un **esp. topológico** donde:

→ $\tau_X \subseteq \mathcal{F}$

→ $(\forall A \in \tau_X \setminus \{\varnothing\}) \quad \mu(A) > 0$

→ $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$

entonces $\mathcal{R}(f) = \operatorname{clos}(f(X))$.

✍ Si X es **compacto**, $\mathcal{R}(f) = f(X)$.

Supremo esencial de una función

Sea (X, μ) un espacio de medida
y $a \in \mathbb{C}^X$ μ–medible.

Un número real $C > 0$ es una **cota esencial** de a si

$$\mu(\{\, x \in X \;:\; |a(x)| > C \,\}) = 0.$$

Definimos el **supremo esencial** de a como

$$\operatorname{ess\,sup}(a) := \operatorname{ínf}\,\{\, C > 0 \;:\; C \text{ es cota esencial de } a \,\}\,.$$

$$\boxed{\operatorname{ess\,sup}(a) = \sup(\mathcal{R}(|a|))}$$

Los espacios $L^\infty(X,\mu)$ y $L^2(X,\mu)$

☛ (X,μ) un espacio de medida σ–finita.

$$L^\infty(X,\mu) := \left\{\, a \in \mathbb{C}^X \ : \ (\exists\, C > 0) \quad |a(x)| \leq C \quad \mu\text{–c.t.p.} \,\right\}$$

Obs: $a \in L^\infty(X,\mu)$ ssi $\operatorname{ess\,sup}(a) < +\infty$.

$\| a \|_\infty = \operatorname{ess\,sup}(a) \quad \longrightarrow \quad (L^\infty(X,\mu), \|\cdot\|_\infty)$ es un esp. de Banach

Sea $f \in \mathbb{C}^X$. Escribimos $f \in L^2(X,\mu)$ siempre que

$$\int_X |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(\mathrm{x}) < +\infty.$$

Obs: $(f,g) \mapsto \int_x f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu \quad \longrightarrow \quad L^2(X,\mu)$ es un esp. de Hilbert

⚠ En realidad los elementos de $L^\infty(X,\mu)$ y $L^2(X,\mu)$ son **clases de equivalencia** inducidas por la relación de "igualdad μ–c.t.p."

Álgebra de Banach

Es un **espacio de Banach** $(A, \|\cdot\|)$ dotado de un producto tal que:

- ☞ $(\forall\, x, y, z \in A) \quad x(yz) = (xy)z$
- ☞ $(\forall\, x, y, z \in A) \quad x(y+z) = xy + xz, \quad (x+y)z = xz + yz$
- ☞ $(\forall\, x, y \in A)(\forall\, \lambda \in \mathbb{C}) \quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$
- ☛ $(\forall\, x, y \in A) \quad \|\, xy \,\| \leq \|\, x \,\| \|\, y \,\|$

Álgebra–C*

Es un **álgebra de Banach** $(A, \|\cdot\|)$ con una función $* : A \to A$ llamada **involución** que cumple:

- ☞ $(\forall\, x \in A) \quad (x^*)^* = x$
- ☞ $(\forall\, x, y \in A) \quad (x+y)^* = x^* + y^*$
- ☞ $(\forall\, x, y \in A) \quad (xy)^* = y^* x^*$
- ☞ $(\forall\, x \in A)(\forall\, \lambda \in \mathbb{C}) \quad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$
- ☛ $(\forall\, x \in A) \quad \|\, x x^* \,\| = \|\, x \,\|^2$

ej. $L^\infty(X, \mu)$ con el producto usual de funciones y la conjugación.

Operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

$$(a \in L^\infty(X,\mu)) \qquad M_a : L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$$

$$\boxed{M_a f(x) := a(x) f(x)}$$

$$\| M_a f \|_2^2 = \int_X |a(x)f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \| a \|_\infty^2 \, \| f \|_2^2 < +\infty$$

Obs: $\| M_a \| \leq \| a \|_\infty$

Aritmética del operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

$(OM1)$	$M_a + M_b = M_{a+b}$
$(OM2)$	$\lambda M_a = M_{\lambda a}$
$(OM3)$	$(M_a)^* = M_{\overline{a}}$
$(OM4)$	$M_{\mathbf{1}} = \mathrm{I}_{L^2(X,\mu)}$
$(OM5)$	$M_a M_b = M_{ab}$

Norma del operador de multiplicación en $L^2(X, \mu)$

$$\boxed{\| M_a \| = \| a \|_\infty}$$

☛ $\|M_a\| \leq \| a \|_\infty$ ✓

☞ $\|M_a\| \geq \| a \|_\infty$

Sea $\varepsilon > 0$.

$$A_\varepsilon := \{\, x \in X \ : \ |a(x)| > \|\, a \,\|_\infty - \varepsilon \,\}$$

obs: $\mu(A_\varepsilon) > 0$.

$$(X, \mu) \text{ esp. de medida } \sigma\text{–finita} \quad \longrightarrow \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k \text{ con } \mu(Y_k) < +\infty$$

$$A_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} (Y_k \cap A_\varepsilon)$$

$$(\exists\, m) \quad 0 < \mu(Y_m \cap A_\varepsilon) < +\infty$$

$$\text{Sea } f = \frac{\mathbf{1}_{Y_m \cap A_\varepsilon}}{\sqrt{\mu(Y_m \cap A_\varepsilon)}}.$$

☛ $\|\, f \,\|_2 = 1$ y $\|\, M_a f \,\|_2 > \|\, a \,\|_\infty - \varepsilon$

$$\|M_a\| \geq \|\, a \,\|_\infty \qquad ✓$$

El conjunto $\mathcal{A}$ de los operadores de multiplicación en $L^2(X,\mu)$ forma un **álgebra** C*

$\rightarrow \quad \| M_a M_a^* \| = \| M_{a\,\overline{a}} \| = \| a\,\overline{a} \|_\infty = \| a \|_\infty \| \overline{a} \|_\infty = \| M_a \|^2$

La función $\Phi : L^\infty(X,\mu) \rightarrow \mathcal{A}$ definida como

$$\Phi(a) = M_a$$

es un **isomorfismo** de álgebras C*.

Invertibilidad del operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

$$\boxed{M_a \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \mathcal{R}a}$$

☛ $\quad 0 \notin \mathcal{R}(a) \quad \Longrightarrow \quad M_a$ es invert.

$$0 \notin \mathcal{R}(a) \Longrightarrow (\exists\, \varepsilon_0) \quad \mu(\underbrace{a^{-1}(B(0,\varepsilon_0))}_{D}) = 0$$

$$b(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{a(x)} & x \in X \setminus D \\ 0 & x \in D \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad ab = \mathbf{1} \quad \mu\text{–c.t.p.}$$

Obs: $(\forall\, x \in X \setminus D) \left(|a(x)| > \varepsilon_0 \quad \Longrightarrow \quad |b(x)| < \dfrac{1}{\varepsilon_0} \right) \quad \Longrightarrow \quad b \in L^\infty(X,\mu)$

$$M_a M_b = \mathrm{I}_{L^2(X,\mu)} \quad ✓$$

Si T es **acotado** e **invertible**, entonces

$$(\exists\, \delta)(\forall\, x) \quad \|\, x\,\|_2 = 1 \implies \|\, Tx\,\|_2 > \delta$$

T **no** es invertible si

$$(\forall\, \varepsilon)(\exists\, x) \quad (\, \|\, x\,\|_2 = 1\,) \wedge (\, \|\, Tx\,\|_2 < \varepsilon\,)$$

☛ $0 \in \mathcal{R}(a) \quad \Longrightarrow \quad M_a$ **no** es invert.

Sea $\varepsilon > 0$.

$$\mu(\underbrace{a^{-1}(B(0,\varepsilon))}_{E_\varepsilon}) > 0$$

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k \quad \Longrightarrow \quad (\exists\, m) \quad 0 < \mu(Y_m \cap E_\varepsilon) < +\infty$$

$$f = \frac{\mathbf{1}_{Y_m \cap E_\varepsilon}}{\sqrt{\mu(Y_m \cap E_\varepsilon)}}\,, \qquad \|\, f \,\|_2 = 1$$

Tenemos que $(\forall\, x \in Y_m \cap E_\varepsilon) \quad |a(x)| < \varepsilon$,

entonces $\|\, M_a f \,\|_2 < \varepsilon$. ✓

Espectro del operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

$$\mathbf{Sp}(M_a) := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \;:\; \lambda\,\mathrm{I} - M_a \text{ no es invertible} \,\}$$

$$\begin{aligned} \lambda\,\mathrm{I} - M_a \text{ no es invertible} \quad &\Leftrightarrow \quad M_{\lambda\mathbf{1}-a} \text{ no es invertible} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \in \mathcal{R}(\lambda\mathbf{1} - a) \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathcal{R}(a). \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{Sp}(M_a) = \mathcal{R}(a)}$$

Dos teoremas sobre operadores de multiplicación

Teorema 1. Sea $S \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$.
Si para cada $E \subseteq X$ medible

$$S M_{\mathbf{1}_E} = M_{\mathbf{1}_E} S,$$

entonces

$$(\exists\, a \in L^\infty(X,\mu)) \quad S = M_a.$$

Teorema 2. Sea (X,μ) un espacio localmente compacto de medida regular y $S \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$. Si

$$(\forall\, g \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})) \qquad S M_g = M_g S,$$

entonces

$$(\exists\, a \in L^\infty(X,\mu)) \quad S = M_a.$$

Referencias

Larsen, R. (1969) *The multiplier problem.* Series: Lecture notes in mathematics, vol. 105. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. DOI 10.1007/BFb0059711

Halmos, P. (1974) *A Hilbert space problem book.* Graduate texts in mathematics, vol. 19. Springer-Verlag New York. DOI 10.1007/978-1-4615-9976-0

Royden, Rudin, Kreyszig, ...

En español se puede encontrar en los apéndices de las tesis de Christian Leal y Gerardo Ramos

¡Gracias!