INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Reporte Final del servicio social

Ramírez González Sadi Manuel

Nombre del profesor:
Egor Maximenko

MÉXICO, D.F.
ENERO 2013

Contents

1 Lista de códigos para programas que generan ejercicios

A continuación se presentan los códigos tanto de librerías como de programas que se escribieron para generar ejercicios que componen tareas prácticas y después se muestra un ejemplo de la lista de ejercicios:

1.1 Funciones creadas en las bibliotecas de matrices y permutaciones:

```
def fillrand(self, randgen):
    """fills the permutation with random integer values from
    0 to lenght of permutation"""
    self._entries = list(range(self._n))
       for i in range(self._n):
         self._entries[i]= aux[randgen.randint(0, len(aux)-1)]
    randgen.shuffle(self._entries)


def cyclic(self):
    """turns a permutation to a cycle on a list"""
    result=[]
    cyc=[]
    aux=range(self._n)
    j=a=0

    while (len(aux)>0):
       aux.remove(j)
       cyc.append(j)
       j=self._entries[j]

       if j==a:
         result.append(cyc)
         if len(aux)>0:
             j=aux[0]
             cyc=[]
             a=j
    return result
```

```
def cyclictex(self):
    """prints a cicle list with some defined notation"""
    x = self.cyclic()
    a = []
    for c in x:
        s1 = "\ ".join([str(j + 1) for j in c])
        a.append("(" + s1 + ")")
    return "\ ".join(a)


def randtuples(self, setspace, numbel):
    """returns a random tuple of numbel elements
    of the set setspace"""
    tuples=list(itertools.combinations(setspace,numbel))
    a=random.choice(tuples)
    return a


def auxlist(self, varname):
    """returns a list of n indexed elements"""
    return ",".join([varname+"_"+str(c+1) for c in self])


def det2(self):
    """Trying Classes and functions on Python"""
    return ((self._entries[0][0]*self._entries[1][1])
    -(self._entries[1][0]*self._entries[0][1]))


def replacecol(self, p, values):
    """replaces given values of a column"""
    b = self.copy()
    for i in xrange(b._m):
            b._entries[p][i]=values[i]
    return b
```

```
def collist(self):
    """returns a list of column entries"""
    result=range(self._m)
    for i in result:
        result[i]=self._entries[i][0]
    return result


def cofactor(self, rownum, colnum):
    """returns a cofactor, given a row and a column"""
    r=(self._n)-1
    aux1=range(self._n)
    aux2=range(self._n)
    b=Matrix(r,r)
    aux1.remove(rownum)
    aux2.remove(colnum)
    for i in range(r):
       for j in range(r):
             b._entries[i][j]=self._entries[aux1[i]][aux2[j]]
    return b.det()*(-1)**(colnum+rownum)


def cofactorsrow(self,rownum):
    """returns a list of cofactors along a row"""
    return [self.cofactor(rownum,colnum) for colnum
    in range(self._n)]


def cofactorscol(self,colnum):
    """returns a list of cofactors along a column"""
    return [self.cofactor(rownum,colnum) for rownum
    in range(self._n)]
```

```
def cofactorsrow2(self, rownum):
    """prints the determinant expanded by a number-row"""
    k=0, r=(self._n)-1
    aux1=range(self._n)
    aux2=range(self._n)
    b=Matrix(r,r), result=[]
    while k<self._n:
          aux1.remove(rownum)
          aux2.remove(k)
          for i in range(r):
            for j in range(r):
              b._entries[i][j]=self._entries[aux1[i]][aux2[j]]
          aux1.insert(rownum,rownum)
          aux2.insert(k,k)
          a=b.det()
          s=a*(-1)**(k+rownum)
          result.append(s), k+=1
    return result


def cofactorscol2(self, colnum):
    """prints the determinant expanded by a number-column"""
    k=0, r=(self._n)-1
    aux1=range(self._n)
    aux2=range(self._n)
    b=Matrix(r,r), result=[]
    while k<self._n:
          aux1.remove(k)
          aux2.remove(colnum)
          for i in range(r):
            for j in range(r):
              b._entries[i][j]=self._entries[aux1[i]][aux2[j]]
          aux1.insert(k,k)
          aux2.insert(colnum,colnum)
          a=b.det()
          s=a*(-1)**(k+colnum)
          result.append(s)
          k+=1
    return result
```

```python
def detcolexpansion(self, colnum):
    """returns the determinant expanded by a column"""
    aux=self.cofactorscol(colnum)
    result=[]
    for i in range(self._n):
       result.append("("+str((self._entries[i][colnum]))
       +")"+"("+str(aux[i])+")")
    return "+".join(result)

def detrowexpansion(self, rownum):
    """returns the determinant of a matrix expanded by a row"""
    aux=self.cofactorsrow(rownum)
    result=[]
    for j in range(self._n):
       result.append("("+str((self._entries[rownum][j]))
       +")"+"("+str(aux[j])+")")
    return "+".join(result)

def matrixadjunt(self):
    """returns the adjunt of a matrix"""
    k=0, l=0, r=(self._n)-1
    aux1=range(self._n)
    aux2=range(self._n)
    b=Matrix(r,r)
    c=self.copy()
    while k<self._n:
       while l<self._n:
          aux1.remove(k)
          aux2.remove(l)
          for i in range(r):
             for j in range(r):
                b._entries[i][j]=self._entries[aux1[i]][aux2[j]]
          a=b.det()
          c._entries[l][k]=a*((-1)**(k+l+2))
          aux1.insert(k,k)
          aux2.insert(l,l)
          l+=1
       l=0
       k+=1
    return c
```

1.2 Programa que genera ejercicios de funciones 3-lineales alternantes

Este codigo produce un ejercicio (escrito en LaTeX) de una función que evalúa ciertas combinaciones de elementos de un espacio vectorial y se pide al alumno expresar a la función evaluada en una base de dichos elementos, se debe utilizar las propiedades de las funciones 3-lineales y alternantes y los determinantes para obtener el resultado

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
from texout import *



class LinAltFunctionCreator(ExercisesCreator):
    title = "Funciones 3-lineales Alternantes"
    skills = ["Propiedades de las funciones multilineales
    alternantes y Determinantes\n"]
    task = "Sea $V$ un espacio vectorial real, sea $f\\colon V^3
    \\to\\bR$ una funci\'on 3-lineal y alternante y " +\
    "sean $a,b,c \\in V$. Exprese a $f( {#E#} , {#F#} , {#G#} )$
    en t\'erminos de $f(a,b,c)$.\n"
    answer = "\\[\n{#H#}f(a,b,c).\n\\]\n"

    def TryToCreateExercise(self):
        ed = ExerciseData()
        ed.A = Matrix(3, 3)
        ed.A.fillrandint(-10, 10, self.randgen)
        ed.B=ed.A.rowasvector(0)
        ed.C=ed.A.rowasvector(1)
        ed.D=ed.A.rowasvector(2)
        ed.E=texlinearcombination(ed.B,["a","b","c"])
        ed.F=texlinearcombination(ed.C,["a","b","c"])
        ed.G=texlinearcombination(ed.C,["a","b","c"])
        ed.H=ed.A.det()

        return [abs(ed.H)<80 and abs(ed.H)>15, ed]

LinAltFunctionCreator(todo = "all", filename = "funclinalt2",
nexercises = 10)
```

1.3 Programa que genera ejercicios de funciones 2-lineales alternantes

Este codigo produce un ejercicio (escrito en LaTeX) de una función que evalúa ciertas combinaciones de elementos de un espacio vectorial y se le pide al alumno expresar a la función evaluada en una base de dichos elementos, se debe utilizar las propiedades de las funciones 2-lineales y alternantes y los determinantes para obtener el resultado

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
from texout import *



class LinAltFunctionCreator(ExercisesCreator):
    title = "Funciones 2-lineales Alternantes"
    skills =  ["Propiedades de las funciones multilineales
    alternantes y Determinantes\n"]
    task =  "Sea $V$ un espacio vectorial real, sea $f\\colon V^2
    \\to\\bR$ una funci\'on 2-lineal y alternante y " +\
    "sean $a,b \\in V$. Exprese a $f( {#D#} , {#E#})$ en
    t\'erminos de $f(a,b)$.\n"
    answer = "\\[\n{#F#}f(a,b).\n\\]\n"

    def TryToCreateExercise(self):
        ed = ExerciseData()
        ed.A = Matrix(2, 2)
        ed.A.fillrandint(-10, 10, self.randgen)
        ed.B=ed.A.rowasvector(0)
        ed.C=ed.A.rowasvector(1)
        ed.D=texlinearcombination(ed.B,["a","b"])
        ed.E=texlinearcombination(ed.C,["a","b"])
        ed.F=ed.A.det()

        return [abs(ed.F)<80 and abs(ed.F)>15, ed]

LinAltFunctionCreator(todo = "all", filename = "funclinalt1",
nexercises = 10)
```

1.4 Programa que genera ejercicios de funciones antisimétricas

Este código produce un ejercicio (escrito en LaTeX) que nos expresa a una función multilineal arbitraria y se pide al alumno escribirla en cierta forma definida utilizando las propiedades de las funciones antisimétricas

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
from texout import *
from permut import *


class AntisimetricFunctionCreator(ExercisesCreator):
    title = "Funciones multilineales"
    skills = ["Propiedades de las funciones antisim\'etricas"]
    task = "Sea $X$ un conjunto, sea $f\\colon X^6 \\to\\bR$
    una funci\'on antisim\'etrica y sean
    " +\ "$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$ elementos de $X$.
    Exprese a $f({#B#})$ como $f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$.\n"
    answer = "\\[\n{#C#}f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6).\n\\]\n"

    def TryToCreateExercise(self):
        ed = ExerciseData()
        ed.A = Permutation(6)
        ed.A.fillrand(self.randgen)
        ed.B=ed.A.auxlist("a")
        ed.C=ed.A.sign()
        ed.C="+" if ed.A.sign()== 1 else "-"

        return [ed.A.inv()>6, ed]

AntisimetricFunctionCreator(todo = "all", filename = "funcantsim",
nexercises = 10)
```

1.5 Programa que genera ejercicios del desarrollo del determinante

Este código produce un ejercicio (escrito en LaTeX) que genera una matriz de dimensión n y se pide al alumno calcular el determinante utilizando el desarrollo por filas y columnas, el resultado se expresa en forma de sumatoria

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
from texout import *
from permut import *
import itertools
import random

class DetExpRowColCreator(ExercisesCreator):
    title = "Determinantes"
    skills = ["Desarrollo del determinante por medio de filas
    y columnas."]
    task = "Calcule el determinante de $A$=${#A#}$, utilizando
    el desarrollo por medio de la fila {#p1#} y la columna {#q1#} "
    solution = "\\begin{align*}\n\\det(A)\\amp={#J#}\\\\\n\\amp={#K#}.
    \n\\end{align*}"
    answer = "\\[\n\\det(A)={#detA#}.\n\\]\n"
    n=4

    def TryToCreateExercise(self):
        aux=range(self.n)
        pairs=list(itertools.combinations(aux,2))
        ed = ExerciseData()
        ed.A = Matrix(self.n, self.n)
        ed.A.fillrandint(-6, 6, self.randgen)
        ed.detA=ed.A.det()
        [ed.p,ed.q]=random.choice(pairs)
        ed.p1 = ed.p+1
        ed.q1 = ed.q+1
        ed.J=ed.A.detrowexpansion(ed.p)
        ed.K=ed.A.detcolexpansion(ed.q)
        ed.B=ed.A.cofactorsrow(ed.p)
        ed.C=ed.A.cofactorscol(ed.q)
        detisgood = 5 <= abs(ed.detA) <= 100
        cofactorsaregood = max(map(abs, ed.B + ed.C)) <= 2**(self.n+2)
        Aisgood = ed.A.countzeros()<=1
        return [detisgood and cofactorsaregood and Aisgood, ed]

DetExpRowColCreator(todo = "all", filename = "detexp_n",
nexercises = 10)
```

1.6 Programa que genera ejercicios del desarrollo del determinante de una matriz cuadrada de dimensión 3

Este código produce un ejercicio (escrito en LaTeX) que genera una matriz de dimensión 3 y se pide al alumno calcular el determinante utilizando el desarrollo por filas y columnas, el resultado se expresa en forma de sumatoria

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
from texout import *
from permut import *
import itertools
import random

class DetExpRowColCreator(ExercisesCreator):
    title = "Determinantes"
    skills = ["Desarrollo del determinante por medio de filas
    y columnas."]
    task = "Calcule el determinante de $A$=${#A#}$, utilizando
    el desarrollo por medio de la fila {#p1#} y la columna {#q1#} "
    solution = "\\begin{align*}\n\\det(A)\\amp={#J#}\\\\\n\\amp={#K#}.
    \n\\end{align*}\n"
    answer = "\\[\n\\det(A)={#detA#}.\n\\]\n"

    def TryToCreateExercise(self):
        aux=range(3)
        pairs=list(itertools.combinations(aux,2))
        ed = ExerciseData()
        ed.A = Matrix(3, 3)
        ed.A.fillrandint(-6, 6, self.randgen)
        ed.detA=ed.A.det()
        [ed.p,ed.q]=random.choice(pairs)
        ed.p1 = ed.p+1
        ed.q1 = ed.q+1
        ed.J=ed.A.detrowexpansion(ed.p)
        ed.K=ed.A.detcolexpansion(ed.q)
        ed.B=ed.A.cofactorsrow(ed.p)
        ed.C=ed.A.cofactorscol(ed.q)
        detisgood = 5 <= abs(ed.detA) <= 100
        cofactorsaregood = max(map(abs, ed.B + ed.C)) <= 2**(5)
        Aisgood = ed.A.countzeros()<=1
        return [detisgood and cofactorsaregood and Aisgood, ed]

DetExpRowColCreator(todo = "all", filename = "detexp_3",
nexercises = 10)
```

1.7 Programa que genera ejercicios de un sistema de 3 ecuaciones y la Regla de Cramer

Este código produce un ejercicio (escrito en LaTeX) de un sistema con tres ecuaciones lineales escrito en forma matricial y se pide al alumno que utilice la regla de cramer para hallar las solucions al sistema

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
from texout import *
from vector import *


class CramersRule(ExercisesCreator):
    title = "Regla de Cramer"
    skills = ["Sistemas de ecuaciones lineales y Determinantes\n"]
    task = "Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales
    escrito de la forma matricial $Ax=b$:\n" +\
    "\\[\n{#A#}x={#b#}.\n\\]\n Usando la regla de cramer, encuentre
    la soluci\'on \'unica.\n"
    answer = "\\[\nx={#B#}\n\\]\n"


    def TryToCreateExercise(self):
        ed = ExerciseData()
        ed.A = Matrix(3, 3)
        ed.A.fillrandint(-9, 9, self.randgen)
        ed.B = Vector(3)
        ed.B.fillrandint(-7, 7, self.randgen)
        ed.b=ed.A*ed.B
        ed.E=ed.A.det()


        return [abs(ed.A.det())>10 and abs(ed.A.det())<40, ed]

CramersRule(todo = "all", filename = "cramrule_3", nexercises = 10)
```

1.8 Programa que genera ejercicios para calcular el área asociada a un paralelogramo

Este código produce un ejercicio (escrito en LaTeX) dibujando un paralelogramo ubicado de manera aleatoria en el espacio con un área perteneciente a un intervalo definido, se le pide al alumno calcular dicha área utilizando vectores y determinantes

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
from texout import *
from vector import *
import itertools
import random

class AreaDetCreator(ExercisesCreator):
    title = "Determinantes como el \'area orientada de un paralelogramo"
    skills = ["C\'alculo de Determinantes"]
    task = "Sea ABC el tri\'angulo generado por los puntos:
             $A$=({#Ax#},{#Ay#}), $B$=({#Bx#},{#By#}) y $C$=({#Cx#},
             {#Cy#})\n" +\
             "\nI. Calcule el \'area orientada del paralelogramo
             generado por los vectores: $\wvec{AB}$ y $\wvec{AC}$.\n"
           +\ "\nII. Calcule el \'area orientada del paralelogramo
             generado por los vectores: $\wvec{BA}$ y $\wvec{BC}$.\n"
           +\ "\nIII. Calcule el \'area del tri\'angulo $ABC$.\n"
           +\ "\\begin{center} \\begin {tikzpicture}[scale=0.5]\n"
           +\ "\\filldraw [very thick,black,fill=green]
           ({#Ax#}, {#Ay#}) -- ({#Bx#}, {#By#}) -- ({#Cx#}, {#Cy#})
           -- cycle;" +\ "\\draw[very thin,gray] (-5.5, -5.5)
           grid (5.5, 5.5);" +\ "\\draw[-stealth] (-5.5, 0) --
           (5.5, 0) node[right] {$x$};" +\
           "\\draw[-stealth] (0, -5.5) -- (0, 5.5) node[above] {$y$};"
           +\ "\\node[below] at (5, 0) {$\scriptstyle 5$};"+\
           "\\node[left] at (0, 5) {$\scriptstyle 5$};"+\
           "\\end {tikzpicture}\\end{center}\n"
    solution = "\n$\wvec{AB}={#AB#}$,\\quad $\wvec{AC}={#AC#}$,
                \\qquad $\wvec{BA}={#BA#}$,\\quad $\wvec{BC}={#BC#}$.\n"
    answer = "\n{#detA#}, \\qquad {#detB#}, \\qquad {#C#}\n"
```

```
    def TryToCreateExercise(self):
        pairs=list(itertools.combinations([-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4],2))
        ed = ExerciseData()
        ed.A=Matrix(2,2)
        ed.B=Matrix(2,2)
        [ed.Ax,ed.Ay]=random.choice(pairs)
        [ed.Bx,ed.By]=random.choice(pairs)
        [ed.Cx,ed.Cy]=random.choice(pairs)


        ed.AB=Vector(2)
        ed.AB[0]=ed.Bx-ed.Ax
        ed.AB[1]=ed.By-ed.Ay
        ed.AC=Vector(2)
        ed.AC[0]=ed.Cx-ed.Ax
        ed.AC[1]=ed.Cy-ed.Ay
        ed.BA=Vector(2)
        ed.BA[0]=ed.Ax-ed.Bx
        ed.BA[1]=ed.Ay-ed.By
        ed.BC=Vector(2)
        ed.BC[0]=ed.Cx-ed.Bx
        ed.BC[1]=ed.Cy-ed.By
        ed.A.replacecol(0,ed.AB)
        ed.A.replacecol(1,ed.AC)
        ed.B.replacecol(0,ed.BA)
        ed.B.replacecol(1,ed.BC)
        ed.detA=ed.A.det()
        ed.detB=ed.B.det()
        ed.C=abs(ed.detA)/2

        Vectorsaregood = (ed.AB[0]!=ed.AC[0]!=ed.BC[0])
        Aisgood = ed.A.countzeros()<=1
        DetAisgood = 30 <= abs(ed.detA) <= 50


        return [Vectorsaregood and Aisgood and DetAisgood, ed]

AreaDetCreator(todo = "all", filename = "areadet", nexercises = 10)
```

1.9 Programa que genera ejercicios del cálculo de una matriz adjunta

"""Este código produce un ejercicio (escrito en LaTeX) con una matriz aleatoria de dimensión n, y se pide al alumno calcular su matriz adjunta, su determinante y se pide verificar que se cumple una identidad entre las matrices """

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
from texout import *
from permut import *

class MatrixAdjuntCreator(ExercisesCreator):
    title = "Matriz Adjunta y Determinantes"
    skills = ["Determinantes, Adjunta de una Matriz."]
    task = "Sea A=${#A#}$.\n\n \\ \\\n\nCalcule la matriz adjunta
    de A y su determinante y compruebe que se satisface " +\
    "la ecuaci\'on: $adj(A)*A=det(A)*I$, donde I es la matriz
    identidad.\n"
    solution = "\\[\n\\det(A)*I={#D#}.\n\\]\n"
    answer = "\\[\n\\det(A)={#detA#}, \\ \\ \\ adj(A)={#C#}.
    \\ \n\\]\n"
    n=4


    def TryToCreateExercise(self):
        ed = ExerciseData()
        ed.A = Matrix(self.n, self.n)
        ed.A.fillrandint(-5, 5, self.randgen)
        ed.detA=ed.A.det()
        ed.C=ed.A.matrixadjunt()
        ed.D=ed.A*ed.C
        detisgood = 5 <= abs(ed.detA) <= 2**(self.n+3)
        Aisgood = ed.A.countzeros()<=1

        return [detisgood and Aisgood, ed]

MatrixAdjuntCreator(todo = "all", filename = "adjmatrix_n",
nexercises = 10)
```

1.10 Programa que genera ejercicios del cálculo de una matriz adjunta de dimensión 3

"""Este código produce un ejercicio (escrito en LaTeX) con una matriz aleatoria de dimensión 3 y se pide al alumno calcular su matriz adjunta, su determinante y se pide verificar que se cumple una identidad entre las matrices """

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
from texout import *
from permut import *

class MatrixAdjuntCreator(ExercisesCreator):
    title = "Matriz Adjunta y Determinantes"
    skills = ["Determinantes, Adjunta de una Matriz."]
    task = "Sea A=${#A#}$.\n\n \\ \\\n\nCalcule la matriz adjunta
    de A y su determinante y compruebe que se satisface " +\
    "la ecuaci\'on: $adj(A)*A=det(A)*I$, donde I es la matriz
    identidad.\n"
    solution = "\\[\n\\det(A)*I={#D#}.\n\\]\n"
    answer = "\\[\n\\det(A)={#detA#}, \\ \\ \\ adj(A)={#C#}.
    \\ \n\\]\n"


    def TryToCreateExercise(self):
        ed = ExerciseData()
        ed.A = Matrix(3, 3)
        ed.A.fillrandint(-10, 10, self.randgen)
        ed.detA=ed.A.det()
        ed.C=ed.A.matrixadjunt()
        ed.D=ed.A*ed.C
        detisgood = 5 <= abs(ed.detA) <= 40
        Aisgood = ed.A.countzeros()<=1

        return [detisgood and Aisgood, ed]

MatrixAdjuntCreator(todo = "all", filename = "adjmatrix_3",
nexercises = 10)
```

2 Ejemplo de una tarea conformada por listas de ejercicios generados por los códigos

Engrape aquí
No doble

Álgebra II. Tarea 7. Variante α.

Permutaciones.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 11% de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1%.*
Dadas las permutaciones φ, ψ, χ, calcule los productos $\varphi\psi$, $\psi\chi$, $(\varphi\psi)\chi$, $\varphi(\psi\chi)$. Después de cada multiplicación compruebe que el signo del producto es igual al producto de los signos.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1%.*
Calcule los productos $\varphi\psi$ y $\psi\varphi$. Después de cada multiplicación compruebe que el signo del producto es igual al producto de los signos.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1%.*
Calcule φ^{-1}, ψ^{-1}, $\psi^{-1}\varphi^{-1}$, $\varphi\psi$, $(\varphi\psi)^{-1}$. Después de cada operación haga la comprobación de los signos.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1%.*
Escriba las transposiciones $\tau_{3,4}$ y $\tau_{2,7}$ en forma explícita y calcule los productos $\varphi\tau_{3,4}$, $\tau_{3,4}\varphi$, $\varphi\tau_{2,7}$, $\tau_{2,7}\varphi$, donde

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1%.*
Calcule $\operatorname{inv}(\varphi)$ y escriba todos los pares ordenados $(\varphi(i), \varphi(j))$ tales que $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$, $i < j$ y $\varphi(i) > \varphi(j)$, donde

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haga lo mismo para la permutación $\psi = \varphi\tau_{2,3}$, luego para la permutación $\chi = \varphi\tau_{4,5}$.

Ejercicio 6. *1%.*
Calcule $\operatorname{inv}(\varphi)$. Calcule $\varphi\tau_{p,p+1}$ e $\operatorname{inv}(\varphi\tau_{p,p+1})$ para todo $p \in \{1, \ldots, 6\}$.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1%.*
Calcule $\operatorname{inv}(\varphi)$ y factorice φ en un producto de transposiciones simples que contenga precisamente $\operatorname{inv}(\varphi)$ factores. Haga la comprobación.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1%.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente permutación φ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1%.*
Escriba en el orden lexicográfico todas las permutaciones que pertenecen a S_4, Calcule sus signos y encuentre el conjunto A_4.

Ejercicio 10. *2%.*
Calcule todos los productos $\varphi\psi$, donde $\varphi \in A_4$ y ψ es la permutación dada. Escriba los signos de estos productos. Puede usar los resultados del ejercicio anterior.

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante α.

Determinantes.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15% de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *0.5%.*
Sea X un conjunto, sea $f\colon X^6 \to \mathbb{R}$ una función antisimétrica y sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ elementos de X. Exprese a $f(a_5, a_4, a_2, a_6, a_1, a_3)$ como $f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$.

Ejercicio 2. *0.5%.*
Sea V un espacio vectorial real, sea $f\colon V^2 \to \mathbb{R}$ una función bilineal alternante y sean $a, b \in V$. Exprese a $f(8a + 3b, 2a - 2b)$ en términos de $f(a, b)$.

Ejercicio 3. *1%.*
Sea V un espacio vectorial real, sea $f\colon V^3 \to \mathbb{R}$ una función 3-lineal alternante y sean $a, b, c \in V$. Exprese a $f(6a + 5b + c, -6a + 5b + 6c, -a - 3b - 2c)$ en términos de $f(a, b, c)$.

Ejercicio 4. *1%.*
El polinomio $f(x)$ está definido como el siguiente determinante. Calcule el coeficiente de x^4 en el polinomio $f(x)$. Se recomienda recordar la definición del determinante a través de permutaciones y encontrar los sumandos del determinante que contienen a la potencia x^4.

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} -x & -3 & 2 & -3x \\ -x & -3 & 0 & -2x \\ 1 & -2x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1%.*
Calcule el determinante de la matriz A usando operaciones elementales con renglones y la expansión por cofactores a lo largo de columnas casi nulos. Luego calcule el determinante de la matriz transpuesta $A^\top$ usando operaciones elementales con renglones y la expansión por cofactores a lo largo de columnas casi nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -5 & -3 \\ -7 & 6 & 4 & -7 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1%.*
Calcule el determinante de la matriz A de dos maneras diferentes:

1. Expandiendo por cofactores a lo largo del renglón 3.

2. Expandiendo por cofactores a lo largo de la columna 2.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -4 & 4 \\ -5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2%.*
Calcule la matriz AB y los determinantes de las matrices A, B y AB. Verifique que se cumple la igualdad $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1%.*
Calcule la matriz adjunta clásica $\operatorname{adj}(A)$ de la matriz A, calcule $\det(A)$ y compruebe que se cumple la igualdad $\operatorname{adj}(A)A = \det(A)I_3$. Escriba la matriz A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *2%.*
Resuelva el sistema de ecuaciones lineales con la regla de Cramer. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -5 & -6 & -4 \\ 5 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2%.*
Dados los puntos x_k y los valores y_k, $k \in \{0, 1, 2\}$, escriba el sistema de ecuaciones lineales que deben satisfacer los coeficientes del polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ para que se cumplan las igualdades $P(x_k) = y_k$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Calcule el determinante de la matriz del sistema con la fórmula de Vandermonde. Resuelva el sistema con la regla de Cramer. Escriba el polinomio $P(x)$ y comprueba las igualdades $P(x_k) = y_k$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

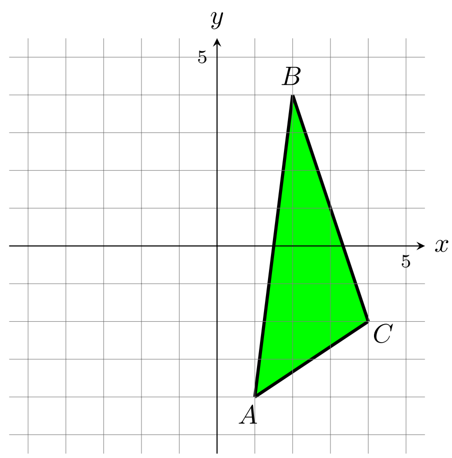
$$\begin{aligned} x_0 &= 1, & x_1 &= 2, & x_2 &= 5, \\ y_0 &= 5, & y_1 &= 8, & y_2 &= 29. \end{aligned}$$

Ejercicio 11. *1.5%.*
Resuelva el sistema de ecuaciones lineales con la regla de Cramer. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 - 3\,\mathrm{i} & -1 + 2\,\mathrm{i} \\ 4 + 3\,\mathrm{i} & 3 - \mathrm{i} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -11 + 4\,\mathrm{i} \\ -1 - 4\,\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *0.5%.*
Saque las coordenadas de los puntos A, B, C del dibujo y calcule:

- el área orientada del paralelogramo generado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$;
- el área orientada del paralelogramo generado por $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$;
- el área del triángulo ABC.



Ejercicio 13. *1%.*
Dados los puntos P, Q, R, S del espacio cartesiano, calcule:

- el volumen orientado del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$;
- el volumen orientado del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{QS}$;
- el volumen de la pirámide $PQRS$.

$$P = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3 Listas de probemas teóricos sobre el tema “permutaciones”

Permutaciones - Problemas teóricos

1. Escriba la definición de permutación.

Composición de permutaciones

2. Escriba la tabla de multiplicación en S_3.

3. Sea $\psi \in S_n$. Definamos la función $f\colon S_n \to S_n$ mediante la regla:

$$\forall \varphi \in S_n \qquad f(\varphi) = \varphi\psi.$$

Demuestre que f es una biyección.

4. Sea $\psi \in S_n$. Definamos la función $f\colon S_n \to S_n$ mediante la regla:

$$\forall \varphi \in S_n \qquad f(\varphi) = \psi\varphi.$$

Demuestre que f es una biyección.

5. Definamos la función $f\colon S_n \to S_n$ mediante la regla:

$$\forall \varphi \in S_n \qquad f(\varphi) = \varphi^{-1}.$$

Demuestre que f es una biyección.

Transposiciones

6. Definición de transposición. Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$. La *transposición* $\tau_{p,q}$ de p y q es la permutación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ que intercambia los elementos p y q y queda inmovibles todos los demás elementos. Escriba la regla de correspondencia de $\tau_{p,q}$ de manera formal.

7. Multplicación por una transposición por la derecha. Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$ y sea $\psi = \varphi\tau_{p,q}$. Explique cómo obtener la lista $\psi(1), \ldots, \psi(n)$ de la lista $a_1, \ldots, a_n$.

8. Multiplicación por una transposición por la izquierda. Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$ y sea $\psi = \tau_{p,q}\varphi$. Explique cómo obtener la lista $\psi(1), \ldots, \psi(n)$ de la lista $a_1, \ldots, a_n$.

Número de inversiones

Definición (número de inversiones de una permutación). Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\operatorname{inv}(\varphi) \coloneqq \#\big\{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \colon \quad i < j, \quad \varphi(i) > \varphi(j)\big\}.$$

Recordando que φ es una biyección y haciendo el cambio de variables $a = \varphi(j)$, $b = \varphi(i)$ podemos escribir la definición de $\operatorname{inv}(\varphi)$ de otra manera:

$$\operatorname{inv}(\varphi) = \#\big\{(a,b) \in \{1,\ldots,n\}^2 \colon \qquad a < b, \quad \varphi^{-1}(a) > \varphi^{-1}(b)\big\}.$$

9. Calcule el número de inversiones $\operatorname{inv}(\varphi)$ en la permutación $\varphi \in S_n$ definida mediante la regla $\varphi(i) = n + 1 - i$, esto es,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cambio del número de inversiones de una permutación al multiplicar por una transposición simple

10. Sea $\varphi \in S_n$ y sea $p \in \{1,\ldots,n-1\}$ tal que $\varphi(p) < \varphi(p+1)$. Demuestre que

$$\operatorname{inv}(\varphi\tau_{p,p+1}) = \operatorname{inv}(\varphi) + 1.$$

11. Sea $\varphi \in S_n$ y sea $p \in \{1,\ldots,n-1\}$ tal que $\varphi(p) > \varphi(p+1)$. Demuestre que

$$\operatorname{inv}(\varphi\tau_{p,p+1}) = \operatorname{inv}(\varphi) - 1.$$

12. Calcule $\operatorname{inv}(\varphi\tau_{p,p+1})$, donde $p \in \{1,\ldots,n-1\}$ y φ es la permutación del Problema 9:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Descomposición de una permutación un un producto de transposiciones simples

13. Sea $\varphi \in S_n$ una permutación tal que $\operatorname{inv}(\varphi) \neq 0$. Demuestre que existe un índice $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ tal que $\varphi(k) > \varphi(k+1)$.

14. Sea $\varphi \in S_n$ y sea $k = \operatorname{inv}(\varphi)$. Demuestre que φ se puede descomponer en un producto de k transposiciones simples.

15. Dada la permutación φ, calcule $\operatorname{inv}(\varphi)$ y descomponga φ en $\operatorname{inv}(\varphi)$ transposiciones simples.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Signo de una permutación

16. Escriba la definición del signo de una permutación.

17. Signo del producto. Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Demuestre que

$$\operatorname{sign}(\varphi\psi) = \operatorname{sign}(\varphi)\operatorname{sign}(\psi).$$

18. Signo de la permutación inversa. Sea $\varphi \in S_n$. Demuestre que

$$\operatorname{sign}(\varphi^{-1}) = \operatorname{sign}(\varphi).$$

19. Sea $\varphi \in S_n$, $\varphi = \psi_1 \cdots \psi_k$, donde $\psi_1, \ldots, \psi_k$ son transposiciones (no necesariamente simples). Demuestre que $\operatorname{sign}(\varphi) = (-1)^k$.

Grupo alternado

Definición del grupo alternado. $A_n \coloneqq \{\varphi \in S_n\colon\ \operatorname{sign}(\varphi) = 1\}$.

20. Muestre las siguientes propiedades de A_n:

1. Si $\varphi, \psi \in A_n$, entonces $\varphi\psi \in A_n$.
2. $e \in A_n$.
3. Si $\varphi \in A_n$, entonces $\varphi^{-1} \in A_n$.

Estas propiedades significan que A_n es un subgrupo de S_n.

21. Sea $n \geqslant 2$ y sea $\psi \in S_n$ una permutación impar. Se considera el mapeo $\Lambda\colon A_n \to S_n$, definido mediante la regla

$$\Lambda(\varphi) \coloneqq \varphi\psi \qquad \forall \varphi \in A_n.$$

Muestre que Λ es inyectivo y que su imagen es $S_n \setminus A_n$.

Funciones simétricas y antisimétricas

Notación. Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de n argumentos y sea $\varphi \in S_n$. Entonces la función $\varphi f\colon X^n \to \mathbb{F}$ se define mediante la siguiente regla:

$$(\varphi f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}).$$

En otras palabras, la función φf se obtiene de la función f al aplicar a los argumentos de f la permutación φ.

22. Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de n argumentos y sean $\varphi, \psi \in S_n$. Demuestre que

$$(\varphi\psi)f = \varphi(\psi f).$$

23. Criterio de que una función es simétrica. Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de n argumentos. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\tau_{p,p+1} f = f$ para todo $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.

(b) $\tau_{p,q} f = f$ para todos $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$.

(c) $\varphi f = f$ para toda $\varphi \in S_n$.

24. Criterio de que una función es antisimétrica. Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de n argumentos. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\tau_{p,p+1} f = -f$ para todo $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.

(b) $\tau_{p,q} f = -f$ para todos $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$.

(c) $\varphi f = \operatorname{sign}(\varphi) f$ para toda $\varphi \in S_n$.

25. Dé un ejemplo de una función antisimétrica $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que no sea constante cero.

26. Sea $f\colon X^5 \to \mathbb{R}$ una función antisimétrica. Exprese $f(x_4, x_2, x_1, x_5, x_3)$ a través de $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

27. Sea $f\colon X^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos argumentos. Demuestre que existe un único par de funciones (g, h) tales que $g\colon X^2 \to \mathbb{R}$, $h\colon X^2 \to \mathbb{R}$, g es simétrica, h es antisimétrica:

$$g(y, x) = g(x, y) \quad \forall x, y \in X; \qquad h(y, x) = -h(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

4 Listas de probemas teóricos sobre el tema "determinantes"

Determinantes - Problemas teóricos

Definición de la función determinante

Definición (determinante). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces $\det(A)$ se define de la siguiente manera:

$$\det(A) \coloneqq \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sign}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\varphi(i)}. \tag{1}$$

28. De la fórmula general (1) deduzca la fórmula para el determinante de orden 2.

29. De la fórmula general (1) deduzca la fórmula para el determinante de orden 3.

30. Lema: correspondencia entre permutaciones y sus inversas. Demuestre que la función $g\colon S_n \to S_n$ definida mediante la fórmula $g(\varphi) = \varphi^{-1}$ es biyectiva.

31. Teorema: Determinante de la matriz transpuesta. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det(A^t) = \det(A).$$

32. Lema sobre las permutaciones distintas de la permutación identidad. Sea $\varphi \in S_n$, $\varphi \neq e$. Entonces existe un índice $i \in \{2, \ldots, n\}$ tal que $\varphi(i) < i$.

33. Teorema: Determinante de una matriz triangular superior. Sea $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

34. Corolario: Determinante de una matriz triangular inferior. Sea $A \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

35. El polinomio f está definido como el siguiente determinante. Escriba las permutaciones que corresponden a los miembros (sumandos) del determinante que contienen x^4 y calcule el coeficiente de x^4 en el polinomio f.

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} x & 3 & -1 & 2x \\ 4 & 1 & 2x & 3 \\ -x & 2 & 3 & 5x \\ 7 & 7x & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Funciones polilineales alternantes

Definición (función polilineal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $f\colon V^k \to \mathbb{F}$ una función. Se dice que f es *polilineal* si f es lineal con respecto a cada uno de sus k argumentos. También se usan los términos *multilineal* y *k-lineal*.

Definición (función alternante). Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de n argumentos. Se dice que f es *alternante* (*alternada*, *alterna*) si f se anula siempre que al menos dos de sus argumentos coinciden. De manera formal: si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $x_i = x_j$, entonces $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

36. Para cada una de las siguientes funciones $f\colon (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$ determine si esta función es bilineal alternante o no:

1. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := ab - cd.$
2. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := ad - bc.$
3. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := a.$
4. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := 0.$
5. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := 1.$

37. Sea V un espacio vectorial real, sea $f\colon V^3 \to \mathbb{R}$ una función 3-lineal alternante y sean $a, b, c \in V$. Exprese $f(a + 2b - c, 5a + c, 2b + c)$ a través de $f(a, b, c)$.

38. Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sea $f\colon V^k \to \mathbb{F}$ una función polilineal alternante. Sean $v_1, \ldots, v_{k-1} \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$f\left(v_1, \ldots, v_{k-1}, \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j\right) = 0.$$

39. Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sea $f\colon V^k \to \mathbb{F}$ una función polilineal alternante. Sean $v_1, \ldots, v_k \in V$ vectores linealmente dependientes. Demuestre que

$$f(v_1, \ldots, v_k) = 0.$$

40. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $f\colon V \to \mathbb{F}$ una función que cumple con las siguientes propiedades:

1. $f(u + \mu v, v) = f(u, v)$ para todos $u, v \in V$ y todo $\mu \in \mathbb{F}$.
2. $f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v)$ para todos $u, v \in V$ y todo $\alpha \in V$.
3. $f(v, u + \mu v) = f(v, u)$ para todos $u, v \in V$ y todo $\mu \in \mathbb{F}$.
4. $f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v)$ para todos $u, v \in V$ y todo $\alpha \in V$.
5. $f(v, v) = 0$ para todo $v \in V$.

Demuestre que f es aditiva con respecto a cada uno de sus argumentos y, por consecuencia, f es una función bilineal alternante.

Determinante como una función polilineal alternante

41. Definición (determinante como función de los renglones de la matriz). Definamos la función $D\colon (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ de la siguiente manera. Para todos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$ pongamos $D(a_1, \ldots, a_n) = \det(A)$, donde A es la matriz formada de los renglones $a_1, \ldots, a_n$, esto es,

$$A_{i,j} \coloneqq (a_i)_j.$$

42. Demuestre que D es una función polilineal.

43. Demuestre que D es una función alternante.

44. Expresión de una función polilineal alternante a través de la función determinante. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V y sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una función n-lineal alternante. Demuestre que para todos $a_1, \ldots, a_n \in V$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \det(A) f(b_1, \ldots, b_n)$$

donde A es la matriz formada por las columnas de coordenadas de los vectores $a_1, \ldots, a_n$ con respecto a la base $\mathcal{B}$:

$$A = \big[(a_1)_{\mathcal{B}} \ \ldots \ (a_n)_{\mathcal{B}}\big].$$

45. Determinante es la única función polilineal alternante de los renglones de la matriz que toma valor uno en la matriz identidad. Sea $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$. Supongamos que f es una función n-lineal alternante de los renglones de la matriz y cumple con la condición $f(I_n) = 1$. Demuestre que $f = \det$.

46. Determinante del producto de matrices. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

47. Determinante de una matriz triangular superior por bloques. Sean $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0}_{n,m} & C \end{array}\right] = \det(A)\det(C).$$

Expansión del determinante por cofactores a lo largo de una fila o columna

48. Lema: encaje canónico de S_{n-1} en S_n. Consideremos la función $g\colon S_{n-1} \to S_n$ definida mediante la siguiente regla:

$$(g(\varphi))(i) = \begin{cases} \varphi(i), & i \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ n, & i = n. \end{cases}$$

Demuestre que g está bien definida, es decir, $g(\varphi) \in S_n$ para toda $\varphi \in S_{n-1}$. Demuestre que g es inyectiva. Calcule la imagen (el conjunto de los valores) de la función g.

49. Lema: determinante de una matriz con el último renglón casi nulo. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz tal que $A_{n,j} = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por B a la submatriz de la matriz A ubicada en los primeros $n-1$ renglones y las primeras $n-1$ columnas:

$$B = A_{\{1,\ldots,n-1\},\{1,\ldots,n-1\}}.$$

Demuestre que

$$\det(A) = A_{n,n} \det(B).$$

50. Lema: determinante de una matriz con un renglón casi nulo. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $A_{p,j} = 0$ para todos $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$. Denotemos por B a la submatriz de la matriz A ubicada en los renglones $\{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}$ y las columnas $\{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$:

$$B = A_{\{1,\ldots,n\}\setminus\{p\},\{1,\ldots,n\}\setminus\{q\}}.$$

Demuestre que

$$\det(A) = A_{p,q}(-1)^{p+q} \det(B).$$

51. Notación (cofactores). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por $\operatorname{Cof}(A, p, q)$ al determinante de la matriz que se obtiene de la matriz A al quitar el p-ésimo renglón y la q-ésima columna.

52. Teorema: expansión de un determinante a lo largo de un renglón. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{p,j} \operatorname{Cof}(A, p, j).$$

Cálculo de algunos determinantes del n-ésimo orden

En cada uno de los siguientes problemas hay que calcular el determinante D_4 y escribir una fórmula general para D_n. Sugerencia: aplicando operaciones elementales transforme la matriz a una matriz triangular. Haga las operaciones elementales de tal manera que el procedimiento se pueda generalizar naturalmente a cualquier orden n.

53. $D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}.$

54. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4 \end{vmatrix}.$

55. $D_4 = \begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 \end{vmatrix}.$

56. $D_4 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$

57. $D_4 = \begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}.$

58. $D_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}.$

59. $D_4 = \begin{vmatrix} a_1+x & x & x & x \\ x & a_2+x & x & x \\ x & x & a_3+x & x \\ x & x & x & a_4+x \end{vmatrix}.$

60. $D_n = \det A_n$, donde $A_n = \left[\min\{i,j\}\right]_{i,j=1}^{n}$.

61. $D_n = \det A_n$, donde $A_n = \left[\max\{i,j\}\right]_{i,j=1}^{n}$.

62. $D_n = \det A_n$, donde $A_n = \left[|i-j|\right]_{i,j=1}^{n}$.

Matriz adjunta clásica

63. Definición (matriz adjunta clásica de una matriz cuadrada). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces la *matriz adjunta clásica* de A es la matriz $n \times n$ cuya (i,j)-ésima entrada es el (j,i)-ésimo cofactor de la matriz A:

$$\operatorname{adj}(A) := \big[\operatorname{Cof}(A,j,i)\big]_{i,j=1}^{n}.$$

64. Teorema: Propiedad principal de la matriz adjunta clásica. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A)\, I_n, \qquad \operatorname{adj}(A)\, A = \det(A)\, I_n.$$

65. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz no invertible. Demuestre que cualquier columna de su matriz adjunta clásica $\operatorname{adj}(A)$ es solución de la ecuación $Ax = \mathbf{0}_n$.

Criterio de la invertibilidad de una matriz en términos de su determinante

66. Si el determinante de una matriz es cero, entonces la matriz no es invertible. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $\det(A) = 0$. Demuestre que A no es invertible.

67. Expresión de la matriz inversa a través de la matriz adjunta clásica. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $\det(A) \neq 0$. Pongamos

$$B := \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Demuestre que $AB = I_n$ y $BA = I_n$.

Resumiendo los dos problemas anteriores obtenemos el siguiente criterio:

68. Criterio de la invertibilidad de una matriz en términos de su determinante. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

69. Sea A una matriz de orden 2:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

¿Cuándo es invertible la matriz A? En el caso si A es invertible calcule A^{-1} a través de $\operatorname{adj}(A)$.

70. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Demuestre que A es invertible, calcule $\operatorname{adj}(A)$ y A^{-1}.

71. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F})$ una matriz triangular superior de orden 3:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix}.$$

¿Cuándo es invertible la matriz A? En el caso si A es invertible calcule A^{-1} a través de $\operatorname{adj}(A)$.

72. Tarea adicional. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz triangular superior. Demuestre que $\operatorname{adj}(A)$ también es triangular superior y calcule sus elementos diagonales.

73. Descripción de las matrices que son divisores de cero. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

- Existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ distinta de $\mathbf{0}_{n,n}$ tal que $AB = \mathbf{0}_{n,n}$.
- $\det(A) = 0$.

Nota: Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se llama *divisor derecho de cero* si cumple con (a) y es distinta de $\mathbf{0}_{n,n}$.

Regla de Cramer

74. Enuncie y demuestre la regla de Cramer.

Rango y menores de una matriz

75. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que en A hay menores no nulos de órdenes $1, 2, \ldots, \operatorname{r}(A)$. En otras palabras, demuestre que para todo $k \in \{1, \ldots, \operatorname{r}(A)\}$ en la matriz A hay un menor no nulo de orden k.

Determinante de Vandermonde y su aplicación a la interpolación polinomial

76. Notación (matriz de Vandermonde). Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Denotemos por $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a la siguiente matriz:

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \left[\alpha_i^{j-1}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Por ejemplo,

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}.$$

77. Recursión para el determinante de Vandermonde, $n = 4$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\det V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3) \det V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

78. Recursión para el determinante de Vandermonde. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\det V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i) \right) V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

79. Fórmula para el determinante de Vandermonde. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\det V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i<j}} (\alpha_j - \alpha_i).$$

80. Corolario: determinante de Vandermonde generado por números diferentes por pares es no nulo. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ números diferentes por pares, esto es, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ si $i \neq j$, entonces $\alpha_i \neq \alpha_j$. Demuestre que

$$\det V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0.$$

81. Existencia y unicidad del polinomio interpolante. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ números diferentes por pares y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$. Demuestre que existe un único polinomio $P \in \mathcal{P}()n - 1(\mathbb{F})$:

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j,$$

tal que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad P(\alpha_k) = \beta_k.$$

5 Resumen sobre las sucesiones definidas mediante recurrencias lineales

Abstract

Este documento indica cómo hallar una regla de correspondencia para obtener el valor de un término arbitrario x_n en una relación recursiva lineal de segundo orden con coeficientes constantes sin la necesidad de conocer los valores previos inmediatos.

5.1 Fórmula Recursiva

Introduciremos un método para escribir a un término general x_n de una sucesión de números que siguen un patrón determinado.

Este método al cual se le llama "fórmula recursiva", expresa un término arbitrario x_n como una función que usa al menos el último o los últimos términos anteriores al cual se quiere encontrar el valor (lo cual a veces puede ser muy restringido).

Una fórmula recursiva consta de dos partes:

- Un valor inicial, al menos x_0 (a veces también x_1).
- Una ecuación para x_n como función de x_{n-1} (o x_{n+1} en función de x_n).

5.2 Ejemplos

1. Una fórmula recursiva con la que hemos estado familiarizados es la sucesión de Fibonacci, donde cada término en la sucesión a partir de x_2 es la suma de los dos anteriores, es decir:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1; \\ x_1 &= 1; \\ x_2 &= 2; \\ x_3 &= 3; \\ x_4 &= 5; \\ &\ldots \end{aligned}$$

La ecuación para x_n en función de los términos anteriores es: $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

2. Si es conocida la fórmula recursiva, se puede generar la sucesión, por ejemplo, dados $x_0 = 6$ y $x_{n+1} = x_n + 5$, la sucesión generada por la fórmula es:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + 5 = 6 + 5 = 6 + 5(1) = 11;\\
x_2 &= x_1 + 5 = 11 + 5 = 6 + 5(1) + 5 = 6 + 5(2) = 16;\\
x_3 &= x_2 + 5 = 16 + 5 = 6 + 5(2) + 5 = 6 + 5(3) = 21;\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Pudimos haber escrito a la fórmula como $x_n = 5n+6$, ya que es una relación de recurrencia de primer orden que utiliza sólamente el término anterior inmediato y se añade una diferencia constante.

Si quisiéramos obtener a x_{10}, necesitaríamos conocer a $x_9, x_8, ...$

3. Dada la siguiente fórmula recursiva: $x_{n+1} = x_n + 3n$; $x_1 = 1$, hallaremos los siguientes cuatro términos de la sucesión y luego trataremos de hallar coeficientes explícitos a, b, c para expresar a x_n como $an^2 + bn + c$.

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1 + 3(1) = 4;\\
x_3 &= 4 + 3(2) = 10;\\
x_4 &= 10 + 3(3) = 19;\\
x_5 &= 19 + 3(4) = 31.
\end{aligned}$$

La sucesión generada es: $x_1 = 1; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 10; \quad x_4 = 19; \quad x_5 = 31; \ldots$
Ahora, necesitamos encontrar los valores de a, b, c tales que $x_n = an^2 + bn + c$ para cualquier número natural n, en este caso hallaremos los valores usando un método muy particular.

Se debe cumplir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
x_2 &= a(2)^2 + b(2) + c = 4;\\
x_3 &= a(3)^2 + b(3) + c = 10;\\
x_4 &= a(4)^2 + b(4) + c = 19.
\end{aligned}$$

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, usando la regla de Cramer encontraremos los valores de a, b y c.

Escribimos en forma matricial ($Ax = b$) al sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Ahora las correspondientes matrices A_1, A_2 y A_3 son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \\ 19 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & 1 \\ 16 & 19 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 10 \\ 16 & 4 & 19 \end{pmatrix},$$

$$a = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \qquad b = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{3}{-2} = \frac{-3}{2}, \qquad c = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Finalmente, $x_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$ es la fórmula explícita.

4. Dada la fórmula recursiva $x_{n+1} = x_n + 2n$, con $x_1 = 3$, determinaremos a los primeros cuatro términos de la sucesión.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 2(1) = 5; \\ x_3 &= x_2 + 2(2) = 9; \\ x_4 &= x_3 + 2(3) = 15; \\ x_5 &= x_4 + 2(4) = 23. \end{aligned}$$

La sucesión generada es: $x_1 = 3$; $x_2 = 5$; $x_3 = 9$; $x_4 = 15$; $x_5 = 23$; ...

5. Hallemos los siguientes 4 términos de la sucesión dada por: $x_{n+1} = x_n + x_{n-1} + 3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + x_1 + 3 = 6; \\ x_4 &= x_3 + x_2 + 3 = 11; \\ x_5 &= x_4 + x_3 + 3 = 20; \\ x_6 &= x_5 + x_4 + 3 = 34. \end{aligned}$$

Hallar el valor del término x_{30} no es fácil y esto es una gran desventaja para las fórmulas recursivas.

A continuación mostraremos las fórmulas explícitas deducidas por un método basado en álgebra lineal para conocer al valor x_n sin la necesidad de cacular los términos anteriores inmediatos.

5.3 Relaciones recursivas de segundo orden

Una relación recursiva lineal de segundo orden con coeficientes constantes es una expresión definida para todo número natural positivo de la forma: $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, donde a, b son números reales no nulos y para los que están dados dos valores iniciales reales x_0 y x_1.

Esta expresión nos permite obtener una sucesión de números reales.

Tiene el inconveniente de que para conocer el valor de la función en un número natural "k" arbitrario (x_k) hay que conocer cuando menos los dos anteriores. Es por eso que deseamos hallar una regla de correspondencia que nos indique cómo calcular el n-ésimo valor sin conocer los valores previos inmediatos.

Dada una relación recursiva de segundo orden con coeficientes constantes reales no nulos a, b, y valores iniciales reales $x_0 = c$, $x_1 = d$, $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, escribimos a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n+1} \\ ax_{n+1} + bx_n &= x_{n+2} \end{aligned}$$

Las escribimos en la forma matricial: $Ay_n = y_{n+1}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \qquad y_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Además se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} Ay_n &= y_{n+1} \\ Ay_{n-1} &= y_n \\ &\dots \\ Ay_1 &= y_2 \\ Ay_0 &= y_1 \end{aligned}$$

Y sustituyendo los valores de y_1, y_2, ..., se tiene:

$$\begin{aligned} y_3 &= Ay_2 = A(Ay_1) = A^2y_1 = A^3y_0 \\ y_4 &= Ay_3 = A(A^2y_1) = A^3y_1 = A^4y_0 \\ &\dots \\ y_n &= A^{n-1}y_1 = A^ny_0 \end{aligned}$$

Conocemos a los valores iniciales x_0 y x_1, es decir,

$$y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Nuestro problema radica en calcular la n-ésima potencia de la matriz A, pero si podemos diagonalizar a esta matriz, se escribirá de la forma PDP^{-1}, con D una matriz diagonal y la ventaja de trabajar con las matrices diagonales es la facilidad del cálculo de potencias, es decir, $A^p = PD^pP^{-1}$, pues si D es la siguiente matriz:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{pmatrix}, \qquad D^p = \begin{pmatrix} d_1^p & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2^p & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & d_n^p \end{pmatrix}.$$

Nos enfocaremos en diagonalizar a la matriz A, vamos a calcular sus valores y vectores propios.
Dada una matriz A, su polinomio característico es: $P(t) = \det(A - tI)$, y los valores propios de A son las raíces de $P(t)$.

$$P(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ b & a - t \end{vmatrix} = t^2 - at - b = 0.$$

Para resolver la identidad: $t^2 - at - b = 0$, existen 3 casos posibles:

1) Existan dos soluciones reales distintas, cuando el discriminante de la ecuación es positivo.
2) Exista una solución real de multiplicidad 2, cuando el discriminante es igual a cero.
3) Dos raíces complejas, ocurre cuando el discriminante es negativo.

Recordemos que si una ecuación de segundo grado está dada por: $ax^2 + bx + c$, su discriminnte se define como: $\Delta := b^2 - 4ac$.

En $P(t)$ el discriminante es: $\Delta_t = a^2 + 4b$. Analizaremos sólo los primeros dos casos.

5.4 Caso I: El polinomio característico $P(t)$ tiene dos soluciones reales diferentes ($\Delta_t > 0$)

En este caso las soluciones están dadas por:

$$t_1 = \frac{a + \sqrt{\Delta}_t}{2}, \qquad t_2 = \frac{a - \sqrt{\Delta}_t}{2}.$$

Luego los valores propios de $P(t)$ son t_1 y t_2.

Necesitamos conocer los vectores propios de A.

El Teorema de Cayley-Hamilton asegura que una matriz cuadrada satisface su propio polinomio característico, es decir, si $\lambda_1, \lambda_2, \ ... \ , \lambda_n$ son los valores propios de una matriz H y si $(H - \lambda_1 I)(H - \lambda_2 I)...(H - \lambda_n I) = 0$ entonces los vectores columna de $(H - \lambda_2 I)(H - \lambda_3 I)...(H - \lambda_n I)$ son vectores propios de λ_1.

Se tiene lo siguiente:

$$A - t_1 I = \begin{pmatrix} -t_1 & 1 \\ b & a - t_1 \end{pmatrix}, \qquad A - t_2 I = \begin{pmatrix} -t_2 & 1 \\ b & a - t_2 \end{pmatrix}.$$

Además:

$$\begin{aligned} a - t_1 &= a - \left(\frac{a + \sqrt{\Delta_t}}{2} \right) = \frac{a - \sqrt{\Delta_t}}{2} = t_2, \\ a - t_2 &= a - \left(\frac{a - \sqrt{\Delta_t}}{2} \right) = \frac{a + \sqrt{\Delta_t}}{2} = t_1, \\ t_1 t_2 = \left(\frac{a + \sqrt{\Delta_t}}{2} \right) &\left(\frac{a - \sqrt{\Delta_t}}{2} \right) = \frac{a^2 - (a^2 + 4b)}{4} = -b. \end{aligned}$$

Así:

$$(A - t_1 I)(A - t_2 I) = \begin{pmatrix} -t_1 & 1 \\ b & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t_2 & 1 \\ b & t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 t_2 + b & -t_1 + t_1 \\ -t_2 b + t_2 b & b + t_1 t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y como $(A - t_1 I)(A - t_2 I) = 0$, las columnas de $(A - t_2 I)$ y $(A - t_1 I)$ son vectores propios de los valores propios t_1 y t_2 respectivamente.

Se puede comprobar fácimente que:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Con los vectores propios construimos a la matriz P la cuál es invertible:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj}(P) = \begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |P| = t_2 - t_1, \qquad P^{-1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} t_2 & -1 \\ -t_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y finalmente obtenemos a la matriz diagonal $D = P^{-1} A P$:

$$\begin{aligned} D = P^{-1} A P &= \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} t_2 & -1 \\ -t_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} t_2 & -1 \\ -t_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} t_1 (t_2 - t_1) & 0 \\ 0 & t_2 (t_2 - t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego:

$$D^n = \begin{pmatrix} t_1^n & 0 \\ 0 & t_2^n \end{pmatrix}.$$

Calculamos a la matriz $A^n = PD^nP^{-1}$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^n & 0 \\ 0 & t_2^n \end{pmatrix} \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} t_2 & -1 \\ -t_1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} t_1^n & t_2^n \\ t_1^{n+1} & t_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 & -1 \\ -t_1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} t_1^n t_2 - t_2^n t_1 & t_2^n - t_1^n \\ t_1^{n+1} t_2 - t_2^{n+1} t_1 & t_2^{n+1} - t_1^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Es posible ahora obtener a y_n:

$$y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A^n y_0 = (PD^nP^{-1})y_0 = \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} t_1^n t_2 - t_2^n t_1 & t_2^n - t_1^n \\ t_1^{n+1} t_2 - t_2^{n+1} t_1 & t_2^{n+1} - t_1^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Y tenemos en particular al valor de x_n como función de los valores iniciales de x_0 y x_1,

$$x_n = \frac{x_0(t_1^n t_2 - t_2^n t_1) + x_1(t_2^n - t_1^n)}{t_2 - t_1}.$$

5.5 Caso II: El polinomio característico $P(t)$ tiene una solución real de multiplicidad 2 ($\Delta_t = 0$)

En este caso la única solución está dada por:

$$t = \frac{a}{2}$$

En este caso, la matriz A tiene un sólo valor propio que es t.

También se cumple $(A - tI)(A - tI) = 0$.

$$(A - tI)(A - tI) = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ b & a - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & 1 \\ b & a - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + t^2 & a - 2t \\ (a - t)b - tb & (a - t)^2 + b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} b - b & t - t \\ tb - tb & -b + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Teniendo en cuenta que $a - t = t$ y $t^2 = -b$).

Luego un vector propio para A es:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a/2 \end{pmatrix}$$

En caso de que la matriz A no es diagonalizable, usaremos su forma de Jordan, obteniendo otro vector w tal que $Aw = tw + v$, es decir, una solución de la ecuación $(A - tI)w = v$.

$$(A - tI)w = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ b & a - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -tx + y \\ bx + ty \end{pmatrix}$$

Y queremos que $(A-tI)w=v$, entonces:

$$\begin{pmatrix} -tx+y \\ bx+ty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones donde las soluciones serían de la forma:

$$\begin{pmatrix} z \\ z(1+\frac{a}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z(1+t) \end{pmatrix}$$

Y así el vector w es solución a nuestro sistema, con

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \end{pmatrix}$$

Con los vectores v, w construimos a la matriz P, para luego hallar el bloque de Jordan de la matriz A.
Calculamos:

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1+t & -1 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & 1+t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b & 1-t \\ b & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & 1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La forma de Jordan de la matriz A, resultó ser una matriz triangular y una ventaja de estas matrices es la facilidad del cálculo de sus potencias. Tenemos:

$$B^n = \begin{pmatrix} t^n & nt^{n-1} \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos a la matriz A^n:

$$\begin{aligned} A^n = PB^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^n & nt^{n-1} \\ 0 & t^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t & -1 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^n & t^{n-1}(n+t) \\ t^{n+1} & t^n(n+1+t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t & -1 \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^n(1-n) & nt^{n-1} \\ -nt^{n+1} & t^n(n+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y finalmente calculamos a $y_n = A^n y_0$, en particular calculamos a x_n:

$$y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^n(1-n) & nt^{n-1} \\ -nt^{n+1} & t^n(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$x_n = x_0 t^n + nt^n(\frac{2x_1}{a} - x_0).$$

El último caso es cuando el polinomio característico tiene dos raíces complejas o cuando el determinante es negativo pero el procedimiento es similar que la ocasión donde las raíces son reales y diferentes (o el determinante es positivo), entonces señalando esta situación, lo omitiremos.

6 Resumen sobre los determinantes de las matrices de Toeplitz tridiagonales

Abstract

Este documento muestra un método para calcular los determinantes de las matrices tridiagonales de Toeplitz utilizando una regla de correspondencia previamente obtenida con las relaciones de recurrencia. También muestra el procedimiento para calcular los valores propios de una matriz tridiagonal de Toeplitz muy particular que servirá para resolver el caso general de este problema.

6.1 Determinantes de matrices de Toeplitz tridiagonales

Definición. Una matriz de Toeplitz es aquella en la que cada diagonal descendente de izquierda a derecha es constante. Es decir, si cada elemento de la matriz de Toeplitz A es denotado por $A_{i,j}$, entonces $A_{i,j} = A_{i+1,j+1}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & ... & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & ... & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & ... & a_{-n+3} \\ ... & & & & & ... \\ a_{n-2} & a_{n-3} & & ... & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & ... & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Así una matriz tridiagonal de Toeplitz T, se puede definir como una matriz con tres diagonales de valor constante y las demás entradas nulas, es decir:

$$T = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 & ... & 0 \\ b & a & c & 0 & ... & 0 \\ 0 & b & a & c & ... & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & 0 & ... & b & a & c \\ 0 & 0 & ... & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Queremos conocer el valor de los determinantes de estas matrices, para ello verificaremos que cumplen recurrencias cuadráticas y utilizando las fórmulas obtenidas previamente para conocer el valor de un término arbitrario de una sucesión definida por relaciones de recurrecia, tendremos una fórmula efectiva para los determinantes.

Definimos la siguiente notación para ayudar a comprender el problema:

Para todo número natural k, se definen las matrices:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_0 & c & 0 & ... & 0 & 0 \\ b & a_1 & c & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & ... & 0 & b & a_{k-1} & c \\ 0 & ... & 0 & 0 & b & a_k \end{pmatrix}, \qquad A_0 = (a_0),$$

$$B_k = \begin{pmatrix} b & c & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & c & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a_1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & ... & 0 & b & a_{k-2} & c \\ 0 & ... & 0 & 0 & b & a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Donde $a_i = a_{i+1}$ para toda i; podemos notar que en cada matriz B_k, se encuentra una submatriz A_{k-1}, con k un número natural.

Finalmente, la notación para los determinantes de las matrices A_k, B_k, es:

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_0 & c & 0 & ... & 0 & 0 \\ b & a_1 & c & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & ... & 0 & b & a_{k-1} & c \\ 0 & ... & 0 & 0 & b & a_k \end{vmatrix}, \qquad |A_0| = a_0,$$

$$|B_k| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & c & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a_1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & ... & 0 & b & a_{k-2} & c \\ 0 & ... & 0 & 0 & b & a_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Calcular el determinante de estas matrices puede volverse complicado es por eso que verificaremos que los determinantes cumplen una relación de recurrencia.

Los determinantes de las matrices B_k, con k en los naturales, son de la siguiente forma: $|B_k| = b|A_{k-1}|$, donde b es el valor constante de la diagonal inferior de la matriz de Toeplitz A_{k-1}. Desarrollando el determinante por medio de la primer fila, se tiene:

$$|B_k| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & c & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a_1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & ... & 0 & b & a_{k-2} & c \\ 0 & ... & 0 & 0 & b & a_{k-1} \end{vmatrix}$$

$$= b \begin{vmatrix} a_0 & c & 0 & ... & 0 & 0 \\ b & a_1 & c & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & ... & 0 & b & a_{k-2} & c \\ 0 & ... & 0 & 0 & b & a_{k-1} \end{vmatrix} + c(0)$$

$$= b|A_{k-1}|$$

Luego, los determinantes de las matrices tridiagonales de Toeplitz A_k, con k natural,cumplen recurrencias cuadráticas, es decir, son de la forma:
$|A_k| = a|A_{k-1}| - bc|A_{k-2}|$, con a, b, c valores constantes en las diagonales de las matrices.

Para todo numero natural k, desarrollando el determinante por medio de la primer fila, se tiene:

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_0 & c & 0 & ... & 0 & 0 \\ b & a_1 & c & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & ... & 0 & b & a_{k-1} & c \\ 0 & ... & 0 & 0 & b & a_k \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} a_1 & c & 0 & ... & 0 & 0 \\ b & a_2 & c & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & ... & 0 & b & a_{k-1} & c \\ 0 & ... & 0 & 0 & b & a_k \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} b & c & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & c & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & ... & 0 & b & a_{k-1} & c \\ 0 & ... & 0 & 0 & b & a_k \end{vmatrix}$$

$$= a|A_{k-1}| - c|B_{k-1}| = a|A_{k-1}| - bc|A_{k-2}|.$$

Así la sucesión de determinantes que cumplen la recurrencia cuadrática es la siguiente:

$$|A_k| = a|A_{k-1}| - bc|A_{k-2}|$$

En el documento previo, obtuvimos el siguiente resultado para relaciones de recurrencia.

Dada una relación recursiva de segundo orden, $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, con valores iniciales $x_0 = c$ y $x_1 = d$, a, b reales no nulos y n un natural, se escribe al término x_n en función de los términos iniciales como:

$$x_n = \frac{x_0(t_1^n t_2 - t_2^n t_1) + x_1(t_2^n - t_1^n)}{t_2 - t_1}.$$

Aquí t_1 y t_2 son las raíces del polinomio característico dadas por:

$$t_1 = \frac{a + \sqrt{\Delta_t}}{2}, \qquad t_2 = \frac{a - \sqrt{\Delta_t}}{2}, \qquad \Delta_t = a^2 + 4b.$$

En nuestro caso ($|A_k| = a|A_{k-1}| - bc|A_{k-2}|$) el discriminante es: $\Delta_t = a^2 - 4bc$.

Finalmente la fórmula recursiva para determinantes de matrices de Toeplitz es dada por:

$$|A_k| = \frac{|A_0|(t_1^k t_2 - t_2^k t_1) + |A_1|(t_2^k - t_1^k)}{t_2 - t_1}, \qquad |A_0| = a, \qquad |A_1| = a^2 - bc.$$

Como se cumple que: $t_1 t_2 = bc$ y $t_1 + t_2 = a$, la ecuación nos queda de esta manera:

$$\begin{aligned}
|A_k| &= \frac{|A_0|(t_1^k t_2 - t_2^k t_1) + |A_1|(t_2^k - t_1^k)}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{(t_1 + t_2)(t_1^k t_2 - t_2^k t_1) + ((t_1 + t_2)^2 - t_1 t_2)(t_2^k - t_1^k)}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{t_2^{k+1} - t_1^{k+1}}{t_2 - t_1}
\end{aligned}$$

6.2 Comprobación de nuestra fórmula para el caso n=3

Calcularemos el determinante de la matriz A_2 utilizando nuestra fórmula obtenida y mediante el cálculo directo del determinante.

$$|A_2| = \frac{|A_0|(t_1^2 t_2 - t_2^2 t_1) + |A_1|(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1}$$

Se cumplen las siguientes propiedades: $t_1 t_2 = bc$ y $t_1 + t_2 = a$, por tanto

$$\begin{aligned}
|A_2| &= \frac{a(-t_1 t_2(t_2 - t_1)) + (a^2 - bc)(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} \\
&= a(-t_1 t_2) + (a^2 - bc)(t_2 + t_1) \\
&= -abc + a^3 - abc = a^3 - 2abc
\end{aligned}$$

Calculando el determinante de A_2, por cualquier método se obtiene:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^3 - 2abc$$

Lo cual verifica el resultado.

6.3 Valores propios

Analizaremos un caso muy particular de una matriz tridiagonal de Toeplitz, ya que el caso general se reduce a este. Obtendremos los valores propios de una matriz tridiagonal utilizando nuestra fórmula de recurrencia para los determinantes.

Sea A_n la siguiente matriz tridiagonal de Toeplitz:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & u^2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & u^2 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde u puede ser un número complejo.

Ahora, consideremos la siguientes matrices de Toeplitz B_n y $C_n = uB_n$, donde B_n posee el mismo determinante que la matriz A_n y la matriz C_n es similar a la matriz B_n por tanto los valores propios de la matriz B_n serán u-veces los de la matriz C_n.

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & ... & 0 & 0 \\ u & 0 & u & ... & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & ... & u & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por ello trabajaremos con la matriz C_n y calcularemos sus valores propios:

Definimos a $J_n = det(C_n - \lambda I)$. Así los ceros de J_n son los valores propios que buscamos.

La fórmula de recurrencia que obtuvimos para los determinantes de las matrices de Toeplitz está expresada en términos de las soluciones del polinomio característico y estas a la vez están en función de los valores de las diagonales y la constante en la diagonal principal de la matriz $C_n - \lambda I$ es $-\lambda$.

Queremos que: $Jn = det(C_n - \lambda I) = \frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{t_2 - t_1} = 0$, con:

$$t_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \qquad t_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

Con las propiedades siguientes: $t_1 t_2 = 1$ y a los valores propios en función de las raices: $\lambda = t_2 - t_1$.

Luego tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{t_2 - t_1} = 0$$

Donde estamos suponiendo que $t_2 - t_1 \neq 0$, entonces:

$$\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{n+1} = 1$$

Y como $t_1 t_2 = 1$, $t_2 = t_1^{-1}$, luego $(t_2^2)^{n+1} = 1$.

Las soluciones para t_2^2 son las raices $(n+1)$-ésimas de la unidad.

Sabemos que son: $t_2^2 = \left(e^{\frac{i2\pi}{n+1}}\right)^k$, con $k = 1, ..., n$.

Entonces, $t_2 = \left(e^{\frac{i\pi}{n+1}}\right)^k$ y $t_1 = \left(e^{-\frac{i\pi}{n+1}}\right)^k$, con $k = 1, ..., n$.

Finalmente para cada $k = 1, ..., n$, hemos encontrado un valor para λ, que son los valores propios de la matriz C_n; los denotaremos por λ_k.

$$\begin{aligned}\lambda_k = t_2 - t_1 &= (e^{\frac{i\pi}{n+1}})^k - (e^{-\frac{i\pi}{n+1}})^k \\ &= 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k = 1, ..., n.\end{aligned}$$

Y los valores propios de la matriz B_n son u-veces los de la matriz C_n, tenemos:

$$\lambda_k = 2u\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k = 1, ..., n.$$

Por tanto, dada una matriz tridiagonal de Toeplitz A_n, con la siguiente forma:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & u^2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & u^2 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sus valores propios son:

$$\lambda_k = 2u\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k = 1, ..., n.$$

References

[1] A. Böttcher, S. Grudsky: *Spectral Properties of Banded Toeplitz matrices.* SIAM, Philadelphia, 2005, 411 pp.
ISBN-10: 0898715997. ISBN-13: 978-0898715996.
http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898717853

[2] *Manual de* LaTeX
http://www.fceia.unr.edu.ar/lcc/cdrom/Instalaciones/LaTex/latex.html

[3] *The Python Tutorial*
http://docs.python.org/2/tutorial/