INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Servicio Social

Apuntes sobre el tema:

Transformaciones de Möbius en el plano complejo extendido

Emmanuel Moreno Muñoz

Proyecto de investigación:
IPN-SIP 20170660
Director del proyecto de investigación:
Dr. Egor Maximenko

MÉXICO, D.F.
Septiembre de 2017

Índice general

Reporte global

Justificación

El objetivo de este trabajo es el estudio de las transformaciones de Möbius sobre el plano complejo extendido, el semiplano superior y el disco unitario. Para una mejor comprensión se incluye un leve repaso de variable compleja para enunciar resultados que serán útiles. Se espera que la forma en que se abordan los temas en este texto sean un tanto más comprensibles que otras referencias y de esta forma este trabajo sirva de base para estudiar contenidos con panorama más sofisticado.

Objetivos

1 Repaso breve de temas necesarios de variable compleja.

2 Estudiar las transformaciones de Möbius sobre el plano extendido, su representación matricial y algunas propiedades geométricas.

3 Estudiar y caracterizar los biholomorfismos sobre $\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty, \mathbb{D}, \mathbb{H}$.

4 Conocer el Teorema de Riemann.

Marco Teórico

En análisis complejo, las funciones de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ son llamadas transformaciones de Möbius; estas funciones que, si bien son fáciles de recordar, forman una muy importante clase de funciones porque incluyen a todas las biyecciones biholomorfas $\Omega \to \Omega$ para cada uno de los siguientes dominios Ω: $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{H}$.

El nombre especial de estas funciones es en honor al matemático alemán August Möbius quien fue el primero en introducirlas y estudiarlas alrededor del año de 1827. Uno de los trabajos más conocidos de Möbius fue *el cálculo baricéntrico* que trataba sobre geometría analítica y proyectiva, en el cual introduce las coordenadas homogéneas o coordenadas baricéntricas homogéneas a partir de vectores de coordenadas que definen por ejemplo a la recta proyectiva (y de ahí la recta proyectiva compleja). Es en este contexto de geometría proyectiva donde surgen las transformaciones de Möbius como una forma paramétrica de expresar proyecciones de rectas sobre otras rectas.

Además de las propiedades algebraicas, las transformaciones de Möbius también poseen propiedades geométricas como la propiedad de ser conformes (de preservar ángulos) en cualquier punto del plano ampliado, por otro lado la razón cruzada nos permite relacionar unívocamente pares de ternas de números complejos y de esta forma condicionar las transformaciones de Möbius por su acción sobre tres puntos; la preservación de circunferencias (que es también consecuencia de la razón cruzada) y el principio de simetría.

En de la teoría de espacios de funciones analíticas las transformaciones de Möbius son personajes muy comunes, ya que funcionan bien como cambios de variable naturales que preservan estos espacios. Además, estas funciones ayudan a trasladar el objeto de estudio de un punto arbitrario del dominio al origen o al otro punto elegido, donde su estudio se simplifica. Por las mismas razones las transformaciones de Möbius se utilizan también en la teoría de operadores en espacios de funciones analíticas.

Desarrollo

Se escribieron apuntes sobre los temas establecidos en los objetivos. Este trabajo consta de tres capítulos. En el primer capítulo recordamos definiciones, proposiciones y teoremas elementales de variable compleja, estudiamos la compactificación unipuntual de los números complejos, las ideas clave en la proyección estereográfica, tambien se dirán algunas palabras sobre las funciónes conformes. En el capítulo dos se introducen las transformaciones de Möbius en $\mathbb{C}$ y su extensión a $\mathbb{C}_\infty$, los homomorfismos que nos permiten ver estas funciones como matrices, su propiedad conforme y propiedades geométricas como la razón cruzada. En el último capítulo vemos a las transformaciones de Möbius como biholomorfismos y automorfismos en ciertos dominios de gran interés como el disco unitario. Finalmente se da a conocer uno de los resultados más importantes de análisis complejo que es el Teorema de Riemann.

Conclusiones

Escribir estos apuntes fue muy enriquecedor para mí, por una parte aprendí como redactar textos científicos y también conocer un poco sobre como utilizar el editor de textos LaTeX que seguramente me será de utilidad en el futuro y lo más importante es que me dio la oportunidad de consultar varias fuentes como artículos de investigación y libros en los que contrasté puntos de

vista acerca de las transformaciones de Möbius que me hicieron comprender mejor y ampliar mi visión sobre estos temas. Agradezco al Dr. Egor Maximenko, por la atención prestada durante todo este periodo. Estos apuntes están disponibles libres al público en la página oficial del director de este proyecto `http://esfm.egormaximenko.com`, siendo esta una de las páginas de apuntes más conocidas en el IPN.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. El plano complejo extendido.

El objetivo inmediato es dar una introducción breve sobre la definición formal de $\mathbb{C}_\infty$ que es de alguna manera la adición del elemento ∞ a los números complejos, el cual lo definiremos a partir de la estructura de $\mathbb{C}$ motivado por la necesidad de trabajar o investigar el comportamiento de objetos que involucren este concepto. Como es usual, se denota la distancia euclidiana $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$d(z, w) = |z - w|, \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

El concepto de distancia es fundamental en análisis y se da para poder hablar de cercanía entre elementos, en términos más precisos, convergencia.

1 Definición (sucesión convergente)**.** Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z_0 si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N,\ |z_n - z_0| < \varepsilon$$

y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

A continuación sólo se enuncian algunas propiedades conocidas que pueden ser útiles posteriormente.

2 Proposición. *Sean $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{C}$ tales que convergen a z_0 y w_0 respectivamente, entonces*

a) $(z_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $z_0 + w_0$.

b) $(z_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $z_0 w_0$.

c) Si $w_0 \neq 0$ y $w_n \neq 0$ para todo natural n, entonces la sucesión $\left(\frac{z_n}{w_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\frac{z_0}{w_0}$.

Sistema ampliado de los números complejos.

Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff y sea un elemento ∞ que no pertenece a X. Sea $Y := X \cup \{\infty\}$. Se considera la familia $\mathfrak{T}$ que consiste de los siguientes subconjuntos de Y:

a) $A \in \tau$

b) $A = Y \setminus K$, donde K es un subconjunto compacto de (X, τ).

Es un ejercicio ver que la colección de conjuntos anterior es una topología sobre Y y además $(\mathfrak{T})_X = \tau$.

3 Definición. Sea X y Y espacios topológicos, donde Y es compacto. Se dice que Y es una compactificación de X si existe un homeomorfismo entre X y su imagen $f(X)$, y tal que $f(X)$ es denso en Y.

4 Teorema (Alexandrov)**.** *Sea (X, τ) es un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y no compacto, y sea $(Y, \mathfrak{T})$ definido como antes. Entonces la cerradura de X en $(Y, \mathfrak{T})$ es Y, y $(Y, \mathfrak{T})$ es un espacio de Hausdorff compacto.*

Al espacio $(Y, \mathfrak{T})$ se le llama la compactificación unipuntual o compactificación de Alexandrov del espacio (X, τ).
Aplicando el resultado anterior al conjunto $\mathbb{C}$ obtenemos el plano ampliado o plano extendido de los números complejos. Por lo tanto es posible describir el sistema de vecindades de un punto en $\mathbb{C}_\infty$ del modo siguiente:

a) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces las vecindades de $z \in \mathbb{C}_\infty$ se definen de la misma forma que las vecindades de z $\mathbb{C}$, más precisamente, $V \in \mathcal{V}(z)$ si, y solo si existe $r > 0$ tal que $\{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\} \subset V$.

b) Para $z = \infty$, $V \in \mathcal{V}(\infty)$ si, y solo si V contiene el complemento de algún disco en $\mathbb{C}$, es decir, existe $r > 0$ tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus \{w \in \mathbb{C} : |z_0 - w| < r\} \subset V$, para algún $z_0 \in \mathbb{C}$.

Se introducen pues las operaciones siguientes en $\mathbb{C}_\infty$.

Dados $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ definimos del modo usual $z + w$, zw, si $z, w \in \mathbb{C}$ y si $z \in \mathbb{C}_\infty$,

a) $\infty + z = z + \infty = \infty$.

b) $\infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty$, $z \neq 0$.

c) $\dfrac{z}{0} = \infty$, $\dfrac{z}{\infty} = 0$, $z \neq 0, \infty$.

Las operaciones restantes $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞/∞, $0/\infty$, $\infty/0$ (donde $\cdot$ denota producto) quedan indeterminadas. Como podemos ver, con esta definición $\mathbb{C}_\infty$ no resulta ser un campo.
Para comprender como se da la definición de las operaciones anteriores conviene hacer más clara la idea de convergencia a ∞ de una sucesión.

5 Definición. Se dice que una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ∞ si dada $M > 0$, existe un natural N tal que para toda $n \geq N$, $|z_n| > M$.

Veremos el caso $\infty + z = \infty$, quedando como ejercicio los restantes.

Sean $z \in \mathbb{C}_\infty$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty}(w_n) = \infty$ y $\lim_{n\to\infty}(z_n) = z$, entonces $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \infty$.
Sean $M > 0$ y $\varepsilon > 0$. Suponga que $z \in \mathbb{C}$, como (w_n) converge a infinito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $|w_n| > M + |z| + \varepsilon$.
Como (z_n) converge a z, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N'$, $|z_n - z| < \varepsilon$ y $|z_n| < |z| + \varepsilon$.
Sea $N^* = \max\{N, N'\}$, entonces para $n \geq N^*$

$$|z_n + w_n| \geq |w_n| - |z_n| > M.$$

Así pues, tiene sentido la definición.

La proyección estereográfica.

Ya que $\mathbb{C}$ es metrizable, cabe la pregunta de si $\mathbb{C}_\infty$ también lo es. La respuesta es afirmativa, pero no es inmediata. De hecho, es posible demostrar que no podemos extender la métrica euclidiana de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}_\infty$ para este fin. La solución es representar al plano extendido de tal forma que ∞ cuente con una buena localización y $\mathbb{C}$ tenga un buen retrato en esta nueva presentación y así calcular la distancia entre cualesquiera dos puntos de $\mathbb{C}_\infty$. Esto se hará identificando al plano extendido con un conjunto que sea homeomorfo a el. El homeomorfismo es la llamada *proyección estereográfica*. Considere la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$, centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

En $\mathbb{S}^2$ definimos el punto $\mathcal{N} := (0, 0, 1)$ e identificamos a $\mathbb{C}$ con el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = 0\}.$$

De esta manera $\mathbb{C}$ interseca a la esfera unitaria en el ecuador. Considere ahora un punto $z \in \mathbb{C}$ y la recta que contiene a los puntos z y $\mathcal{N}$; ya que esta recta no es tangente a la esfera en $\mathcal{N}$, interseca a $\mathbb{S}^2$ en otro punto w cuya componente en el eje X_3 es positiva, si $|z| > 1$ y negativa

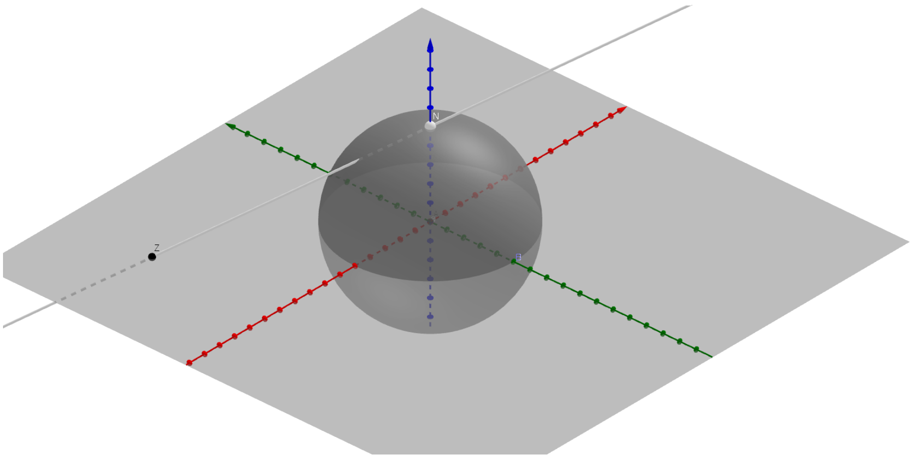


Figura 1.1: La proyección estereográfica.

si $|z| < 1$, e intuitivamente, la recta que contiene al punto en infinito es tangente a la esfera en $\mathcal{N}$.

Esta es la idea de la proyección estereográfica. Formalmente tal función $\rho : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{S}^2$ esta dada por la siguiente regla:

$$\rho(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{z+\overline{z}}{1+|z|^2}, \dfrac{z-\overline{z}}{i(1+|z|^2)}, \dfrac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right), & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ \\ (0,0,1)\,, & \text{si } z = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

La función ρ es un homeomorfismo cuya función inversa esta dada por

$$\rho^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + ix_2}{1-x_3}, & \text{si } x \neq \mathcal{N}, \\ \\ \infty, & \text{si } x = \mathcal{N}. \end{cases}$$

Si vemos a la esfera como subespacio métrico de $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual, al ser topológica la propiedad de ser metrizable, entonces $\mathbb{C}_\infty$ debe también ser metrizable y la métrica (que podríamos decir se induce por el homeomorfismo) se da como siempre para esta situación. Así, definimos la función $d_c : \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{R}$ como,

$$d_c(z,w) = ||\rho(z) - \rho(w)||, \;\; \forall\, z, w \in \mathbb{C}_\infty$$

donde $||\cdot||$ es la norma euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

Se verifica que d_c es una métrica sobre $\mathbb{C}_\infty$ llamada la *métrica cordal*. La forma explícita de esta métrica es la siguiente,

$$d_c(z,w) = \begin{cases} \dfrac{2|z-w|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}, & \text{si } z,w \in \mathbb{C} \\ \\ \dfrac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}, & \text{si } z \neq \infty, \quad w = \infty \end{cases}$$

6 Proposición. *La métrica euclidiana y la métrica cordal inducen la misma topología sobre* $\mathbb{C}$*, es decir, son* (*topologicamente*) *equivalentes.*

Idea de demostración. La función $I_{e,c} : (\mathbb{C}, |\cdot|) \to (\mathbb{C}, d_c)$ es un homeomorfismo pues $I_{e,c}$ es la composición de ρ con ρ^{-1}. □

1.2. Repaso breve de variable compleja elemental.

Se enuncian sin demostración las siguientes proposiciones solo para hacer recordatorio y resaltar propiedades importantes.

Limite de funciones, continuidad.

7 Definición. Sean Ω subconjunto arbitrario de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y sea z_0 un punto de acumulación de Ω. Decimos que f tiene límite w_0 en z_0, si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $z \in \Omega$ que cumpla $0 < |z - z_0| < \delta$, se verifique $|f(z) - w_0| < \epsilon$, y escribimos

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Los conceptos de límite real y complejo son en esencia los mismos, pero el hecho que ahora se cuente con más libertades hace que algunos conceptos sean más fuertes o más restrictivos en su versión compleja que en la real, por ejemplo, se dice que una función real de variable real tiene límite L en c si sus límites laterales existen y coinciden, es decir, solo podemos aproximarnos por dos direcciones al punto c (los limites laterales), pero en el contexto complejo podemos acercarnos por un número infinito de caminos en el plano, ayudados por una curva que se acerque al punto dado.

8 Teorema. *Sean* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *y* z_0 *punto de acumulación de* Ω*. Supongamos que* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *y* $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_0'$*. Entonces el límite de la suma y el producto de las funciones mencionadas existen y*

a) $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = w_0 + w_0'$

b) $\lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)) = w_0 w_0'$

c) Si $g(z) \neq 0$ *para toda* $z \in \Omega$ *y* $w_0' \neq 0$, *entonces* $\lim_{z\to z_0}(f(z)/g(z)) = w_0/w_0'$.

9 Definición. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Decimos que f es continua en z_0 si $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Aquí tenemos presentes tres cosas que condensa la notación anterior,

1. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe,
2. f esta definida en z_0,
3. Los valores coinciden, $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Si alguna de las tres propiedades no se cumple, se tiene que f no es continua en z_0.
El significado $\varepsilon - \delta$ que encierra esta definición es el siguiente: Para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, lo cual en términos más comprensibles quiere decir que para cualquier disco $D(f(z_0), \varepsilon)$ existe otro disco $D(z_0, \delta)$ tal que $f(D(z_0, \delta)) \subset D(f(z_0), \varepsilon)$. Un resultado solo un poco más general es el siguiente.

10 Proposición. *Una función* f *es continua en un punto* z_0 *si y solo si para toda vecindad* V *de* $f(z_0)$, *existe una vecindad* U *de* z_0 *tal que* $f(U) \subset V$.

Propiedades análogas respecto al álgebra de límites se verifican para funciones continuas. Una vez agregado el punto ∞ tiene sentido hablar de límites de funciones que lo involucren (como se hizo con sucesiones) si sustituimos entornos de puntos en $\mathbb{C}$ por entornos de ∞.

11 Definición. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que ∞ es punto de acumulación de A, se dice entonces que:

a) f tiene límite $L \in \mathbb{C}$ cuando $z \to \infty$ ($\lim_{z\to\infty} f(z) = L$), si para cada $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ de tal forma que si $|z| > M$, entonces $|f(z) - w| < \epsilon$.

b) f tiene límite ∞ cuando $z \to z_0$, ($\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$), si para cualquier $R > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z)| > R$.

c) f tiene límite ∞ cuando $z \to \infty$ ($\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$), si para toda $R > 0$, existe $M > 0$, de tal manera que si $|z| > M$, entonces $|f(z)| > R$.

Las propiedades de límites finitos anteriores son aplicables en estos casos, siempre que no se tenga contradicción con las operaciones no definidas con ∞.
De manera similar podemos hablar de continuidad de funciones al involucrar a ∞. Los enunciados de estos hechos se dejan como ejercicio.
Usando las tres definiciones anteriores se prueban los siguientes hechos y nos servirán para poder definir correctamente a las transformaciones de Möbius.

12 Proposición. *Bajo las hipótesis usuales:*

a) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, *si y solo si* $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$,

b) $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$, *si y solo si* $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = w_0$,

c) $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, *si y solo si* $\lim_{z\to 0} \dfrac{1}{f(1/z)} = 0$,

Es decir, podemos cambiar un límite en infinito por uno más “humano”.

13 Corolario. Cualquier función racional admite una extensión continua a $\mathbb{C}_\infty$.

Funciones holomorfas y conformes.

14 Definición. Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Se dice que f es diferenciable en z_0 si

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe en $\mathbb{C}$. En este caso, $f'(z_0)$ denota al valor del límite anterior.

Existen otras formulaciones equivalentes a la definición de derivada que en ciertos casos resultan más prácticos que la definición anterior.

15 Teorema. *Sea Ω abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces f es diferenciable en un punto z_0 en Ω si, y solo si existe una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ continua en z_0, de tal manera que*

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0),$$

para toda $z \in \Omega$.

16 Observación. $f'(z_0) = \varphi(z_0)$.

En el caso real, la derivada de una función en un punto puede verse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto y la diferencial como la mejor aproximación lineal a la función es ese punto. Esta es una propiedad que se copia bien al sentido complejo.

17 Proposición. *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y z_0 un punto interior de A. Sea $f : A \to \mathbb{C}$. Entonces f es diferenciable en z_0 si y solo si existe una función $\varphi : A \to \mathbb{C}$, continua en z_0 tal que $\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$ y f se escribe en la forma*

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + \varphi(z)(z - z_0)$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

18 Observación. $f'(z_0) = c$.

Las demostraciones de las propiedades siguientes son, en esencia, las mismas que las de sus contra partes reales.

19 Teorema. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto, y* $z_0 \in \Omega$. *Si* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *son diferenciables en* z_0. *Se cumplen las afirmaciones siguientes:*

1. f *es continua en* z_0,

2. *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *entonces* $\alpha f + \beta g$ *es diferenciable en* z_0 *y* $(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$,

3. fg *es diferenciable en* z_0 *y* $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$,

4. *Si* $g(z_0) \neq 0$, *entonces* $\dfrac{f}{g}$ *es diferenciable en* z_0 *y* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.

20 Teorema (Regla de la cadena)**.** *Sean* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ *abiertos. Si* $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ *es diferenciable en* z_0, $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ *y* $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ *es diferenciable en* $f(z_0)$, *entonces la composición* $g \circ f$ *es diferenciable en* z_0 *y* $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

21 Definición. Se dice que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región si es abierto y conexo.

22 Proposición. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *una región y* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *diferenciable en* Ω *tal que para toda* $z \in \Omega$, $f'(z) = 0$, *entonces* f *es constante en* Ω.

23 Definición. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Decimos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω si es diferenciable en cualquier punto de Ω. Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de funciones holomorfas sobre Ω. En este caso la función $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $z \mapsto f'(z)$ existe para toda z en Ω.

Decimos entonces que f es holomorfa en un punto $z_0 \in \Omega$ si es holomorfa en un entorno de z_0.

Note que el concepto de función holomorfa en un punto z es más fuerte al de función diferenciable en aquel punto.
Vamos a hablar ahora de lo que se entiende por la derivada de una función en ∞.

24 Definición. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}_\infty$, tal que $\infty \in \Omega$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que f es diferenciable en ∞ si la función $g(z) = f(1/z)$ es diferenciable en $z = 0$ y $f'(\infty) := g'(0)$
Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ y sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = \infty$. Se dice entonces que f es diferenciable en a si la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ es diferenciable en a y $f'(a) := g'(a)$.
Por último si $a = \infty$, f se dice diferenciable en ∞ si la función $g(z) = \dfrac{1}{f(\frac{1}{z})}$ es diferenciable en 0 y $f'(\infty) := g'(0)$

De forma análoga decimos que f es holomorfa en $\infty \in \Omega$ si $f(1/z)$ es holomorfa en un entorno de 0, de igual forma las demás.

25 Definición. Una curva o trayectoria es una función continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que $[a,b] \subset \mathbb{R}$. A los elementos $\gamma(a), \gamma(b)$ se les llama los puntos extremos inicial y final de γ respectivamente. La curva γ se dice simple, si no tiene auto intersecciones, es decir, es inyectiva. Cuando la curva es simple en el intervalo abierto, pero $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que γ es una curva simple cerrada.
Se dice que la curva γ es suave si $\gamma'(t)$ existe y es continua en todo el intervalo cerrado $[a,b]$ y no nula en intervalo abierto (a,b).
Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Si γ no es una curva cerrada, se dice que γ tiene orientación positiva si al recorrer la curva de su extremo inicial a su extremo final corresponde a que el parámetro t tome valores crecientes en $[a,b]$.
Hay que saber distinguir entre una curva γ y su imagen, a esta última se le llama la traza de la curva y se denota por, $\gamma^*([a,b])$, el cual es compacto y conexo.

Descripción (consideraciones) geométrica de las funciones conformes.

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva suave, y sea t_0 en (a,b), entonces el vector tangente unitario a la traza de γ en el punto $z_0 = \gamma(t_0)$ definido por $\mathbf{T} = \frac{\gamma_1'(z_0)}{|\gamma_1'(z_0)|}$ existe. Se observa que el ángulo de inclinación o el ángulo entre este vector tangente y el eje real es $\arg(\gamma'(t_0))$. Considere ahora dos curvas suaves γ_1, γ_2 definidas sobre ciertos intervalos I, J respectivamente, orientadas positivamente, tales que para algún $t_0 \in (I \cap J)^\circ$, $\gamma_1(t_0) = z_0 = \gamma_2(t_0)$. Dado que las curvas son suaves, el vector tangente unitario a γ_1 en z_0 (resp. γ_2) existe, se define entonces el ángulo θ entre las curvas γ_1 y γ_2 como:

$$\theta = \arg(\mathbf{T}_1) - \arg(\mathbf{T}_2)$$

en $[0,\pi]$ siempre que sea posible ir de $\mathbf{T}_2$ en sentido contrario a las manecillas del reloj a través de θ hacia $\mathbf{T}_1$, en caso contrario $-\theta$ es el valor del ángulo en el intervalo $[-\pi, 0]$.

26 Definición. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$, donde Ω es abierto en $\mathbb{C}$. Se dice que f es conforme en un punto $z_0 \in \Omega$ si para cualesquiera dos curvas orientadas positivamente γ_1, γ_2 (definidas sobre ciertos intervalos) en Ω, tales que se intersecan en z_0, el ángulo entre las curvas es igual al ángulo entre las imágenes de las curvas tanto en magnitud como en sentido.

Se dice que una función es *anticonforme* si preserva el valor del ángulo pero no su orientación.

El siguiente teorema nos da una condición suficiente para que una función sea conforme en un punto.

27 Teorema. *Sean Ω un abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en Ω y $z_0 \in \Omega$. Si $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0.*

28 Observación. El recíproco del teorema anterior es verdadero bajo ciertas hipótesis adicionales.

29 Ejemplo. Sea $\exp : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\exp(z) = e^z$. Como $e^z \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces f es conforme en cualquier punto de $\mathbb{C}$.

El teorema de la función inversa y la regla de la cadena dan el siguiente resultado esperado.

30 Proposición. *Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones biyectivas y conformes. Entonces f^{-1} y $g \circ f$ son conformes.*

31 Corolario. El conjunto de funciones conformes y biyectivas con la operación de composición forman un grupo.

Conviene entonces saber cuando una función f no es conforme en algún punto y para eso se presenta el siguiente resultado.

32 Definición. Decimos que una función f, holomorfa en un punto z_0 y no constante tiene un punto crítico en ese punto si $f'(z_0) = 0$.

El siguiente teorema nos da una descripción de como cambia el ángulo entre curvas en un punto crítico bajo una función holomorfa, en particular se deduce que las funciones holomorfas en puntos críticos no son conformes.

33 Teorema. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa en un punto crítico z_0 y tal que*

$$f'(z_0) = f''(z_0) = ... = f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

pero $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ para $n > 1$. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas suaves que pasan por un punto z_0 y sea α el ángulo entre estas dos curvas. Entonces el ángulo entre las imágenes de las curvas en $f(z_0)$ es $n\alpha$.

34 Ejemplo. Sea $f(z) = z^2$, entonces $f'(z) = 2z$. Vemos que f es conforme en todos los puntos distintos de 0, y que 0 es un punto crítico de f. Por el teorema anterior f no es conforme en 0. Más generalmente, sea n entero mayor a uno, y $f(z) = z^n$, entonces f tiene un único punto crítico en 0, por el teorema anterior se tiene que los ángulos en 0 son magnificados por el factor n.

35 Ejemplo. Veamos donde son conformes las funciones sinh y cosh.
Encontremos los puntos donde $\sinh(z)$ se anula.
Tenemos

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1$$

Si $z = x + iy$, entonces por la fórmula de Euler, $e^{2z} = 1$ si y solo si $x = 0$ y $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Análogamente se ve que $\cosh(z) = 0$ si y solo si $z = i\pi k + i\frac{\pi}{2}$. Ya que la derivada de $\cosh(z)$ es $\sinh(z)$ se sigue que $\cosh(z)$ es conforme en los puntos z donde el seno hiperbólico no se anula, es decir $z \neq i\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Los números $z = i\pi k$ son puntos críticos del coseno hiperbólico y como $\cosh^{(2)}(z) = \cosh(z)$ no se anula en ahí, entonces por el teorema anterior $\cosh(z)$ magnifica ángulos en un factor de dos en estos puntos por lo que solo es conforme para $z \neq i\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
El mismo ejercicio muestra que $\sinh(z)$ es conforme solo en $z \neq i\pi k + i\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

36 Ejercicio. Muestre en que puntos la función que $z \mapsto \tan(z)$ es conforme.

Capítulo 2

Transformaciones de Möbius.

37 Definición. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$. La función $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \tag{2.1}$$

es llamada transformación fraccional lineal o transformación de Möbius.

38 Observación. La condición $ad - bc \neq 0$ se introduce para que las transformaciones de Möbius sean inyectivas (y por lo tanto no constantes), en efecto, sean z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $T(z_1) = T(z_2)$, entonces

$$\begin{aligned} (az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_1 + d) \\ \Rightarrow (ad - bc)(z_1 - z_2) = 0 \end{aligned}$$

luego T va a ser inyectiva si $ad - bc \neq 0$.

Posteriormente veremos que la misma condición es suficiente para que una transformación de Möbius sea conforme.

39 Definición. Una función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es una

- Traslación si:$f(z) = a + z, a \in \mathbb{C}$.
- Dilatación si: $f(z) = kz$, $k > 0$.
- Rotación si: $f(z) = \mathrm{e}^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- Inversión si: $f(z) = 1/z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Las funciones antes mencionadas se dicen funciones especiales. Note que estas funciones son, en particular, transformaciones de Möbius. Analicemos algunos casos particulares. Sea T transformación de Möbius.

Caso I: $\mathbf{c} = \mathbf{0}$

En este caso T es una función lineal y tiene la forma $T(z) = az + b$ para determinados a y b. Supongamos que $a = 1$, entonces $T(z)$ es una traslación en b unidades del punto z. Escribamos $z = x + iy$ y $b = b_1 + ib_2$ entonces

$$T(z) = T(x + iy) = (x + iy) + (b_1 + ib_2) = (x + b_1) + i(y + b_2)$$

La cual es una traslación en cada uno de los ejes.

Supongamos ahora que $b = 0$, luego $T(z) = az$, para algún a.

Si $|a| = 1$, podemos escribir $T(z) = \mathrm{e}^{i\theta} z$ y si $z = r\mathrm{e}^{i\alpha}$ entonces

$$T(z) = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)}$$

Lo que significa que T solo modifica el argumento y no el módulo de z.

Si $a > 0$ y $z = re^{i\theta}$ tenemos $T(z) = are^{i\theta}$ lo que significa que T solo modifica el módulo de z, aumentándolo si $a > 1$, y reduciéndolo si $a < 1$.

En general para cualquier número complejo $a \neq 0$,

$$T(z) = |a| \left(\frac{a}{|a|} \right) z$$

Podemos finalmente hacer la siguiente observación.

Si $c = 0$, T puede ser escrita como

$$T(z) = |a| \left(\frac{a}{|a|} \right) z + b \tag{2.2}$$

En conclusión en el caso lineal las transformaciones de Möbius pueden ser escritas como composición de una rotación, dilatación y una traslación.

Notamos que en este caso, las figuras geométricas (en el plano complejo) no son alteradas en su forma, por mencionar un ejemplo, la imagen de una circunferencia vuelve a ser una circunferencia y un cuadrado se transforma en otro cuadrado. Esto por que como vimos en el caso lineal todos los puntos se magnifican, trasladan y rotan en la misma proporción. Como ejemplo en la siguiente figura vemos la imagen de un triángulo con vértices en $(-6, -2), (-4, 2), (-2, -4)$ bajo la acción de la función $T(z) = 2iz + 5$.

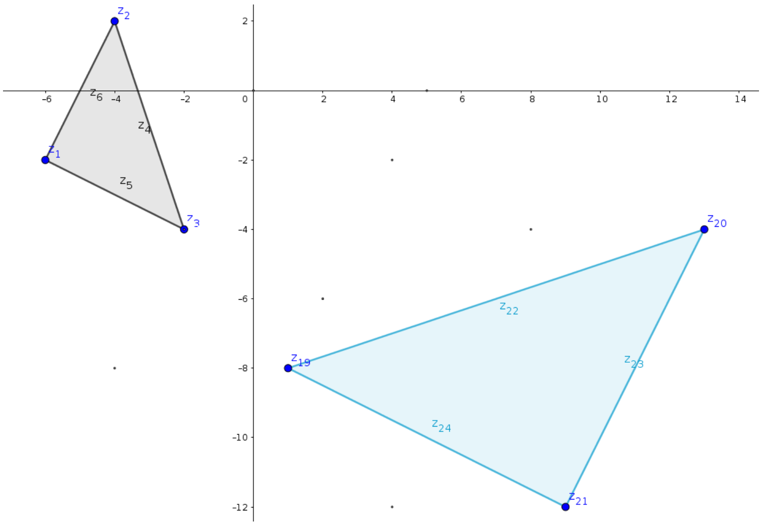


Figura 2.1: En negro el triángulo original. En azul la imagen bajo T.

Caso II: $\mathbf{c} \neq 0$

Si $a = 0 = d$, T es una inversión; haciendo $z = re^{i\theta}$ resulta

$$T(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

De esto se sigue que un punto z con coordenadas polares (r, θ) es mapeado por la función recíproca a un punto w con coordenadas polares $(1/r, -\theta)$.

La siguiente proposición muestra un hecho más general que (2,2).

40 Proposición. *Una transformación de Möbius es la composición de funciones especiales.*

Demostración. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius. Procedamos por casos.
Si $c = 0$, T tiene la forma $T(z) = \alpha z + \beta$, lo cual ya se discutió.
Si $c \neq 0$ entonces,

$$\begin{aligned}
T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{c^2(az+b)}{c^2(cz+d)} &= \frac{ac^2z+bc^2}{c^2(cz+d)} \\
&= \frac{ac^2z+bc^2+adc-adc}{c^2(cz+d)} \\
&= \frac{ac(cz+d)+c(bc-ad)}{c^2(cz+d)} \\
&= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} \\
&= \delta + \frac{\rho}{z+\eta}
\end{aligned}$$

en donde $\delta = \frac{a}{c}$, $\rho = \frac{bc-ad}{c^2}$, $\eta = \frac{d}{c}$.

$\square$

41 Proposición. *Las transformaciones de Möbius son biyecciones de $\mathscr{D} = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{d}{c}\right\}$ en $\mathscr{R} = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{a}{c}\right\}$. Más aun, si T es una transformación Möbius, entonces T^{-1} es también una transformación de Möbius.*

Demostración. Sea $T(z) = w$ en la definición. Despejando a z se llega a la siguiente expresión:

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \tag{2.3}$$

donde $ad - bc \neq 0$. Si definimos $z = S(w)$, entonces al calcular $T(S(w))$ se obtiene

$$\begin{aligned} T(S(w)) &= \frac{a(\frac{-dw+b}{cw-a}) + b}{c(\frac{-dw+b}{cw-a}) + d} \\ &= \frac{-adw + ab + bcw + -ab}{-cdw + bc + dcw - ad} \\ &= \frac{(bc - ad)w}{bc - ad} = w \end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $S(T(z)) = z$. Se concluye entonces que S es la función inversa de T y por tanto T es una biyección.

$\square$

2.1. Transformaciones de Möbius en el plano extendido.

Al comienzo de nuestro estudio se definió a las transformaciones de Möbius como mapeos racionales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, que eran biyecciones de $\mathbb{C}/\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ sobre $\mathbb{C}/\left\{\frac{a}{c}\right\}$ y continuas por ser cociente de funciones continuas. Al extender la definición a $\mathbb{C}_\infty$ se busca que esta herede las propiedades que ya se tenían en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, se define para todos $a, b, c, d, \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$, $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ de la siguiente manera: Si $c \neq 0$,

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{az + b}{cz + d}, & \text{si } z \in \mathbb{C}/\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \\ \\ \dfrac{a}{c}, & \text{si } z = \infty \\ \\ \infty, & \text{si } z = -\frac{d}{c} \end{cases} \tag{2.4}$$

(2.5)

y si $c = 0$,

$$T(z) = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ \\ \infty, & \text{si } z = \infty \end{cases} \tag{2.6}$$

La definición anterior se da en parte para que de esta manera las transformaciones de Möbius sean continuas en $\mathbb{C}_\infty$. Para justificar la definición anterior se utilizan las propiedades de límites en infinito ya vistas antes y se demuestra que las transformaciones de Möbius así extendidas son funciones continuas y biyectivas. En efecto, vamos a calcular, por ejemplo, el límite de $T(\frac{1}{z})$ cuando z tiende a 0,

$$\lim_{z\to 0} T\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{a}{z} + b}{\frac{c}{z} + d} = \lim_{z\to 0} \frac{a + bz}{c + dz} = \frac{a}{c}$$

Por lo tanto

$$\lim_{z\to\infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} = T(\infty)$$

Lo anterior indica que T es continua en ∞. De manera similar se comprueba la continuidad en los demás casos.

Se concluye que las transformaciones de Möbius son homeomorfismos de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$.

42 Definición. Se denota por $\text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$ al conjunto formado por todas las transformaciones de Möbius de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$.

43 Proposición. *La composición de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius.*

Demostración. Sean $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ y $S(z) = \dfrac{ez + f}{kz + l}$ transformaciones de Möbius, entonces

$$\begin{aligned}(T \circ S)(z) &= \frac{a(\frac{ez + f}{kz + l}) + b}{c(\frac{ez + f}{kz + l}) + d} \\ &= \frac{(ae + kb)z + af + lb}{(ce + kd)z + cf + ld} \\ &= \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\end{aligned}$$

en donde $a_1 = ae + kb$, $b_1 = af + bl$, $c_1 = ce + kd$, $d_1 = cf + ld$, la cual es una transformación de Möbius. Para verificar que se cumple la condición $(ea+fc)(bk+dl)-(ka+cl)(eb+fd) \neq 0$, basta realizar el producto y recordar que, $ad - bc \neq 0$ y $el - fk \neq 0$.

Los demás casos como ejercicio. □

Mediante un sencillo argumento inductivo, se ve que la composición de un número finito de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius.

44 Corolario. El conjunto Möb($\mathbb{C}_\infty$) de las transformaciones de Möbius con la operación de composición de funciones forma un grupo no conmutativo.

45 Observación. Los coeficientes de una transformación de Möbius a, b, c, d son únicos salvo producto por escalares, esto es, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ se tiene que

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}.$$

Propiedad conforme de las transformaciones de Möbius.

Las transformaciones de Möbius son conformes en $\mathbb{C}$ ya que por su derivada, que esta dada por,

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

es no nula, pues $ad - bc \neq 0$. Cabe la pena preguntarse si lo son en todo el plano extendido y la respuesta es afirmativa por lo que se tiene el siguiente teorema.

46 Teorema. *Las transformaciones de Möbius son conformes en* $\mathbb{C}_\infty$.

Demostración. Suponga $c \neq 0$. El resultado ya se tiene para el caso donde $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Si $z = \infty$ y como T es diferenciable en ∞ si $g(z) = T(\frac{1}{z})$ lo es en 0, entonces

$$g(z) = T(\frac{1}{z}) = \frac{\frac{a}{z} + b}{\frac{c}{z} + d} = \frac{a + bz}{c + dz}$$

luego

$$g'(z) = \frac{bc - ad}{(c + dz)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0.$$

Si $z = -\frac{d}{c}$ y T es conforme z si $g(z) = \dfrac{1}{T(z)}$ es conforme en $-\frac{d}{c}$, entonces

$$g(z) = \frac{1}{T(z)} = \frac{cz + d}{az + b}$$

luego

$$g'(z) = \frac{bc - ad}{(az + b)^2} \Rightarrow g'(-\frac{d}{c}) = \frac{c^2}{bc - ad} \neq 0.$$

Suponga ahora que $c = 0$. Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $T'(z) = \dfrac{a}{d} \neq 0$ pues $a \neq 0$.
Finalmente, para $z = \infty$ tenemos que T es conforme en ese punto si $g(z) = \dfrac{1}{T(1/z)}$ es conforme en 0, luego

$$g(z) = \frac{1}{T(1/z)} = \frac{dz}{a + bz}$$

$$g'(z) = \frac{ad}{(a + bz)^2}$$

y

$$g'(0) = \frac{d}{a}.$$

□

Transformaciones de Möbius como matrices.

De acuerdo con la definición de una transformación de Möbius, al ver la forma que presenta y la condición $ad - bc \neq 0$, uno podría pensar que existiría una correspondencia entre estas y las matrices complejas invertibles 2×2, es decir:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \tag{2.7}$$

Por una observación anterior inmediatamente nos damos cuenta que esta asignación no es única pues para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ se tendría

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \lambda A$$

Es decir la función no esta bien definida. Pero no todo esta perdido, si consideramos el problema inverso, es decir, que a una matriz 2×2 le hagamos corresponder una transformación de Möbius, si se tendría una función bien definida. Formalmente comencemos con la siguiente definición.

47 Definición. Se define a GL(2,$\mathbb{C}$) como el conjunto de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{C}$ el cual resulta que ser un grupo con la operación de multiplicación. Este grupo es llamado el **grupo general lineal**:

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\} \tag{2.8}$$

Entonces, a cada matriz $A \in$ GL(2,$\mathbb{C}$),

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

se le asocia una transformación de Möbius,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Esta asignación no es inyectiva por la discusión anterior.

48 Proposición. *La función $\Phi : GL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow$ Möb($\mathbb{C}$) dada por la regla*

$$\Phi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{2.9}$$

es un epimorfismo de grupos.

Demostración. Sean A, B en GL(2,$\mathbb{C}$)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ k & l \end{pmatrix}$$

Por demostrar, que $\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B)$. Se tiene entonces que

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bk & af+bl \\ ce+dk & cf+dl \end{pmatrix} \mapsto \Phi(AB) = \frac{(ae+bk)z+(af+bl)}{(ce+dk)z+(cf+dl)} = \Phi(A) \circ \Phi(B)$$

□

Calculemos el kernel de Φ:

Por definición, $\mathbf{ker}(\Phi) = \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) : \Phi(A) = z\}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d} = z$$

Notamos que la condición que define al kernel implica que c y b son necesariamente cero y que $d = a$, por lo tanto el kernel de Φ son las matrices escalares, es decir, $\mathbf{ker}(\Phi) = \{\lambda I_2 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

Un resultado interesante es que al ser Φ un epimorfismo, por el primer teorema de isomorfismos de grupos, existe un isomorfismo Ψ: GL(2,$\mathbb{C}$)/(**ker**(Φ)) $\longrightarrow$ Möb($\mathbb{C}$). Al grupo cociente GL(2,$\mathbb{C}$)/(**ker**(Φ)) se le llama **grupo proyectivo general lineal** y se denota por PGL(2,$\mathbb{C}$). En términos de diagramas, existe un isomorfismo Ψ:GL(2, $\mathbb{C}$)/ **ker**(Φ) $\longrightarrow$Möb($\mathbb{C}$) que hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Mob}(\mathbb{C}) \\ \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

en el cual $\pi : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ es la proyección canónica.
Una de las primeras ventajas que se obtienen al trabajar con matrices que con funciones, es la parcial simplificación de algunos cálculos algebraicos, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

49 Ejercicio. Usando matrices calcular $(T \circ S(z))^{-1}$, donde $S(z) = (2z+1)/(z-1)$ y $T(z) = (iz+3)/(z+4i)$.

Solución. Representamos en forma matricial a las transformaciones $S(z)$ y $T(z)$ respectivamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} i & 3 \\ 1 & 4i \end{pmatrix}$$

Por una proposición anterior, $S^{-1}(z)$ y $T^{-1}(z)$ se identifican, respectivamente, con las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} -4i & 3 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Como $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$ entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4i & 3 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i+1 & 3-i \\ -4i-2 & 3+2i \end{pmatrix}$$

O sea,

$$(T \circ S(z))^{-1} = \frac{(-4i+1)z+3-i}{(-4i-2)z+3+2i}.$$

□

Como ya se había comentado, los coeficientes son únicos salvo multiplicación por escalares y en consecuencia el epimorfismo anterior no resulta ser inyectivo de tal manera que existe una infinidad de elementos en GL(2,$\mathbb{C}$) que se mapean a un elemento en Möb($\mathbb{C}$). Para reducir el número de matrices resulta conveniente introducir la condición de **normalización** como sigue. Sea A en GL(2,$\mathbb{C}$). Si $\det A = k \neq 1$, entonces la matriz $B = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot A$ es tal que $\det B = 1$ (note que el número k no necesariamente es positivo) y define la misma transformación de Möbius por Φ que A, por lo tanto para fines teóricos conviene considerar el conjunto,

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \det A = 1\}.$$

El cual resulta ser un subgrupo de GL(2,$\mathbb{C}$) llamado el **grupo especial lineal**.

Vamos a ver que al trabajar con SL(2,$\mathbb{C}$) se reduce el número de elementos que se manejan.
Sean A, B elementos de SL(2,$\mathbb{C}$) tales que definen la misma transformación de Möbius, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ que cumple $B = \lambda A$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

Entonces det$A = 1$ y det$B = \lambda^2 = 1$, de donde se deduce que $\lambda = \pm 1$, es decir, para cualesquiera dos matrices en SL(2,$\mathbb{C}$) que definan una misma transformación de Möbius, estas solo difieren por un signo, dicho de otra manera,

$$\left(\Phi|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}\right)^{-1}\left(T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\right) = \left\{\frac{1}{\sqrt{k}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{k}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\}$$

Donde $k = ad - bc$. En la teoría este procedimiento resulta conveniente, pero en la práctica la matriz normalizada puede generar otra con entradas racionales haciéndola más complicada.

Procediendo de forma similar a como se hizo con el grupo general lineal, el homomorfismo $\Phi' : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow$ Möb($\mathbb{C}$) es un epimorfismo de grupos con kernel, $\mathbf{ker}(\Phi') = \{\pm I_2\}$ y Ψ': SL(2,$\mathbb{C}$)/($\mathbf{ker}(\Phi')$) $\longrightarrow$ Möb($\mathbb{C}$) es un isomorfismo. A este nuevo grupo cociente se le llama **grupo proyectivo especial lineal** y se denota por $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

El diagrama que describe la situación anterior es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\pi'"] & \mathrm{Mob}(\mathbb{C}) \\ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \arrow[ur, "\Psi'"'] & \end{tikzcd}$$

con $\pi' : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ la proyección canónica.

50 Ejercicio. Demuestre que el conjunto siguiente, $M := \{T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc > 0\}$ es un subgrupo de Möb($\mathbb{C}$) conocido como el *grupo modular*.

Puntos fijos en las transformaciones bilineales.

Cuando se habla de los puntos fijos que una función pueda tener se refiere de toda una teoría dedicada al estudio de esta propiedad para determinar condiciones de existencia de tales puntos y en los mejores casos dar condiciones suficientes para la unicidad.
Aquí no utilizaremos ninguna herramienta poderosa para ver que las transformaciones de Möbius tienen puntos fijos, solo se harán observaciones en casos particulares y de ahí se seguirá el resultado.

51 Definición. Se dice que una función $f\colon \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ tiene un punto fijo en $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ si $f(z_0) = z_0$.

52 Proposición. *Sea $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ una transformación de Möbius distinta de la identidad, entonces T tiene a lo más dos puntos fijos.*

Demostración. Procedamos por casos.
Caso I, c = 0. Por definición $z = \infty$ es un punto fijo.
En el otro caso, si $z \neq \infty$ resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z \\ \Rightarrow z &= \frac{b}{d-a} \end{aligned}$$

Caso II, c ≠ 0. Resolvemos la ecuación siguiente

$$z = \frac{az+b}{cz+d}$$

lo anterior se reescribe como,

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

(Note que la ecuación cuadrática anterior tiene coeficientes complejos, por lo tanto debe tener especial cuidado al aplicar la fórmula general de solución.) Las soluciones a esta ecuación de segundo grado son

$$z = \frac{a - d + \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} \tag{2.10}$$

□

Del resultado anterior se sigue que si una transformación de Möbius tiene al menos 3 puntos fijos, entonces T es la función identidad.

53 Ejemplo. Hallar los puntos fijos de la función asociada a la matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Vista en su forma funcional esta luce como,

$$R(z) = \frac{\cos(t)z - \sin(t)}{\sin(t)z + \cos(t)}$$

siempre que $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (¿por que?). Por la regla dada en la demostración de la proposición anterior,

$$z = \frac{\cos t - \cos t + \sqrt{(\cos t - \cos t)^2 - 4\sin^2 t}}{2\sin t} = \frac{\sqrt{(-4\sin^2 t)}}{2\sin t}$$

Formalmente $(-4\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}$ es el conjunto $\{2i\sin t, -2i\sin t\}$. Los puntos fijos de $R(z)$ son $z_1 = i$ y $z_2 = -i$. $\square$

54 Ejercicio. Pruebe que si z_1 es raíz de una ecuación polinomial con coeficientes no reales, entonces su conjugado $\overline{z_1}$ no es una raíz de la ecuación.

55 Ejercicio. Discuta la representación matricial de $T(z) = \mathrm{e}^{i\theta}z$ y la matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$.

Dado que podemos identificar a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, un punto (x, y) en $\mathbb{R}^2$, puede ser rotado un cierto ángulo θ, a un nuevo punto (x', y') por la matriz de rotación R en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por otra parte, hemos aprendido que la transformación $T(z) = \mathrm{e}^{i\theta}z$ rota el punto z un ángulo de θ y que una matriz asociada a T es de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algunos podrían pensar que, ya que los puntos del plano son rotados por R (la matriz de rotación) y la transformación T hace lo propio, entonces la matriz asociada a T, debería poder ser expresada de la misma forma que R (de algún modo). Lo cierto es que esto no es posible ya que de ser así la función $T(z) = \mathrm{e}^{i\theta}z$ debería tener punto fijo i que no ocurre, siempre que θ no sea un múltiplo de 2π.

En el ejemplo siguiente vemos una condición suficiente para que podamos representar una transformación de Möbius como una matriz de rotación.

56 Lema. Sea $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, en lugar de escribir $\Phi(A) = T$ (Φ es como en la sección anterior) ponemos T_A. Sea $\mathcal{K} = \{A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) :\ T_A(i) = i\ \}$. Veamos que si $A \in \mathcal{K}$ entonces A se puede escribir como una matriz de rotación, esto es, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Solución. Sea $A \in \mathcal{K}$, entonces,

$$T_A(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = i \implies a - bi = d + ci$$

Por lo que $a = d$ y $b = -c$ y como $ad - bc = 1$, tenemos $a^2 + b^2 = 1$, es decir, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a - bi = \cos\theta + i\sin\theta$, implica que $a = \cos\theta$, $c = -b = \sin\theta$.

$\square$

La razón cruzada.

Antes de definir este concepto vamos a enunciar una proposición que motivara esta definición y que será de utilidad en el papel que juegan las transformaciones de Möbius en la parte geométrica. Por lo tanto se tiene siguiente la proposición.

57 Proposición. *Sean z_1, z_2, z_3 elementos de $\mathbb{C}_\infty$ distintos. Entonces existe una única transformación $T \in$ Möb($\mathbb{C}_\infty$) tal que $T(z_1) = 1$, $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = \infty$.*

Demostración. Defina la función $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ como

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{z-z_2}{z-z_3}\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_2} & \text{si } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \\ \\ \dfrac{z-z_2}{z-z_3} & \text{si } z_1 = \infty \\ \\ \dfrac{z_1-z_3}{z-z_3} & \text{si } z_2 = \infty \\ \\ \dfrac{z-z_2}{z_1-z_2} & \text{si } z_3 = \infty \end{cases} \tag{2.11}$$

Afirmamos que esta función así definida es una transformación de Möbius, en efecto, sea

$$w = \frac{z-z_2}{z-z_3}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$$

efectuando el producto y reagrupando se obtiene

$$Azw + Bz + Cw + D = 0$$

con $A = z_1 - z_2, B = z_3 - z_1, C = z_2z_3 - z_3z_1, D = z_2z_1 - z_2z_3$.

Lo último se puede reescribir en la forma

$$w = \frac{-Bz - D}{Az + C}$$

Como todos los z_j, $j = 1, 2, 3$ son todos distintos entonces

$$AD - BC = (z_2 - z_1)(z_1 - z_3)(z_3 - z_2) \neq 0$$

Los demás casos en la definición de T se asignaron de acuerdo al siguiente límite

$$\lim_{z\to z_j} \frac{z-z_2}{z-z_3}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}, \quad j=1,2,3.$$

Esto demuestra la existencia de T. Ahora probemos que esta función es única, en efecto, supongamos que existe otra función S que verifica la conclusión de la proposición, es decir, $S(z_1)=1, S(z_2)=0, S(z_3)=\infty$, entonces $S\circ T^{-1}$ es también una transformación de Möbius y tal que $(S\circ T^{-1})(z)$ tiene a 1,0,∞ como puntos fijos, y por lo tanto es la identidad, o sea, $S=T$. □

Se tiene el siguiente corolario.

58 Corolario. Sean $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ puntos distintos y sean w_1,w_2,w_3 también elementos diferentes en $\mathbb{C}_\infty$ entonces existe una única $\Psi \in \text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$ tal que $\Psi(z_j)=w_j, \forall j=1,2,3$.

Demostración. Por la proposición anterior existen únicas transformaciones de Möbius S,T tales que:

$$(z_1,z_2,z_3)\to_T (1,0,\infty)$$

$$(w_1,w_2,w_3)\to_S (1,0,\infty)$$

en ese orden. Entonces la transformación $\Psi=S^{-1}\circ T$ satisface que $\Psi(z_j)=w_j, j=1,2,3$. Veamos la unicidad. Supongamos que existe otra transformación ψ con las mismas propiedades que Ψ, entonces $\psi^{-1}\circ\Psi$ tiene tres puntos fijos, luego es la identidad, lo que implica $\psi=\Psi$. □

Por los comentarios al inicio del tema se tiene la siguiente definición.

59 Definición. Dados cuatro puntos $z_0,z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}_\infty$ se define la razón doble o razón cruzada de dichos puntos en ese orden a la imagen de z_0 por la única transformación que manda a los puntos z_1,z_2,z_3 en $1,0,\infty$ en ese orden. En particular, si z_1,z_2,z_3 son finitos escribimos

$$T(z_0)=(z_0,z_1,z_2,z_3)=\frac{z_0-z_2}{z_0-z_3}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$$

Entonces para $z\in\mathbb{C}_\infty$ arbitrario

$$T(z)=(z,z_1,z_2,z_3)=\frac{z-z_2}{z-z_3}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$$

60 Proposición. . *La razón doble se preserva bajo las transformaciones de Möbius, esto es, si $z_0,z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}_\infty$ arbitrarios distintos y S una transformación de Möbius entonces*

$$(z_0,z_1,z_2,z_3)=(S(z_0),S(z_1),S(z_2),S(z_3))$$

Demostración. La demostración sigue la misma idea que el corolario anterior y se deja como ejercicio.

□

Aquí se presentan algunos ejemplos.

61 Ejemplo. Encontrar la transformación de Möbius que mapee los puntos $2+i, -3, i$ en los puntos $4i, 1-i, 0$ en ese orden.

Solución. Seguimos la idea utilizada en la demostración del corolario anterior,

$$\begin{aligned} T(z) &= (z, 2+i, -3, i) \\ &= \frac{z+3}{z-i} \cdot \frac{(2+i)-i}{(2+i)+3} \\ &= \frac{2z+6}{(5+i)z+1-5i} \end{aligned}$$

donde $T(2+i) = 1, T(-3) = 0, T(i) = \infty$.

$$\begin{aligned} S(z) &= (z, 4i, 1-i, 0) \\ &= \frac{z-(1-i)}{z-0} \cdot \frac{4i-0}{4i-(1-i)} \\ &= \frac{4iz-(4i+4)}{(5i-1)z} \end{aligned}$$

de la misma forma $S(4i) = 1, S(1-i) = 0, S(0) = \infty$.
Nosotros debemos calcular $R = S^{-1} \circ T$. Así pues,

$$S^{-1}(z) = \frac{-4i-4}{(5i-1)z-4i}$$

Utilizando matrices se obtiene,

$$\begin{pmatrix} 0 & -4i-4 \\ 5i-1 & -4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5+i & 1-5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16-24i & -24+16i \\ 2-10i & -26+26i \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{(-16-24i)z+(-24+16i)}{(2-10i)z+(-26+26i)} \\ &= \frac{(-8-12i)z+(-12+8i)}{(1-5i)z+(-13+13i)}. \end{aligned}$$

□

62 Ejercicio. Hallar la transformación de Möbius que mapea los puntos $-1, 2i-1, 0$ en $0, i, \infty$.

Para ser más prácticos, conviene pensar a las rectas en $\mathbb{C}$ como circunferencias de radio infinito, de esta forma al llevar a cabo la compactificación del plano complejo, estas rectas se transforman (por la proyección estereográfica) en circunferencias que pasan por el punto $\mathcal{N}$ en la esfera unitaria.

63 Lema. Sea T una transformación de Möbius, entonces $T^{-1}(\mathbb{R})$ es una circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$.

Demostración. Sea $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius. Si $z = x \in \mathbb{R}$, defina $w = T^{-1}(x)$, entonces $x = T(w)$ y cumple $T(w) = \overline{T(w)}$ es decir,

$$\frac{aw+b}{cw+d} = \frac{\overline{aw}+\overline{b}}{\overline{cw}+\overline{d}}$$

donde desarrollando los productos obtenemos

$$(a\overline{c} - \overline{a}c)|w|^2 + (a\overline{d} - \overline{b}c)w + (b\overline{c} - d\overline{a})\overline{w} + (b\overline{d} - \overline{b}d) = 0 \tag{2.12}$$

Si $a\overline{c} \in \mathbb{R}$, entonces $a\overline{c} - \overline{a}c = 0$, por lo tanto la ecuación anterior se convierte en

$$(a\overline{d} - \overline{b}c)w + (b\overline{c} - d\overline{a})\overline{w} + (b\overline{d} - \overline{b}d) = 0$$

la cual es equivalente a

$$(a\overline{d} - \overline{b}c)w - \overline{(a\overline{d} - c\overline{b})w} + (b\overline{d} - \overline{\overline{d}b}) = 0$$

Defina pues $A = (a\overline{d} - \overline{b}c)$ y $B = b\overline{d}$, entonces

$$Aw - \overline{Aw} = \overline{B} - B.$$

Recuerde que $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$, entonces

$$\mathrm{Im}(Aw - B) = 0.$$

Por lo tanto w pertenece a la linea recta [1] determinada por la ecuación anterior.
Si $a\overline{c}$ no es un número real entonces la ecuación (2,12) se transforma en,

$$|w|^2 + \overline{\gamma}w + \gamma\overline{w} - \delta = 0$$

donde $\gamma = \dfrac{a\overline{d} - \overline{b}c}{a\overline{c} - \overline{a}c}$ y $\delta = \dfrac{b\overline{d} - \overline{b}d}{a\overline{c} - \overline{a}c}$.
Concluyendo tenemos que,

[1] **Rectas en $\mathbb{C}$.** Sea $z = u + iv$ y $\mathcal{L}$ una linea recta en $\mathbb{C}$, entonces $z \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(\dfrac{z-u}{v}\right) = 0$.

$$|w+\gamma|^2 = |w|^2 + |\gamma|^2 + \overline{\gamma}w + \gamma\overline{w} = |\gamma|^2 + \delta = \left|\frac{ad-bc}{\overline{a}c - a\overline{c}}\right|^2$$

Implica que para $r = \dfrac{ad-bc}{\overline{a}c - a\overline{c}}$,

$$|w+\gamma| = r$$

la cual describe la ecuación de una circunferencia. □

64 Teorema. *Sean z_0, z_1, z_2, z_3 en $\mathbb{C}_\infty$. Entonces los cuatro puntos pertenecen a una circunferencia si y solo si su razón cruzada (z_0, z_1, z_2, z_3) es un número real.*

Demostración. Sea $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$, entonces por el lema anterior $T(z_0) \in \mathbb{R}$ si y solo si z_0 pertenece a la circunferencia determinada por los puntos z_1, z_2, z_3. □

65 Corolario. Sea C_1 una circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$ y sea S una transformación de Möbius. Entonces $S(C_1)$ es una circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$.

Demostración. Sean z_1, z_2, z_3 en una circunferencia C_1 en $\mathbb{C}_\infty$ y S una transformación de Möbius. Sean $w_j = S(z_j)$, $j = 1, 2, 3$ los cuales determinan una circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$.
Para $z \in \mathbb{C}_\infty$, $(z, z_1, z_2, z_3) = (S(z), w_1, w_2, w_3)$. Se sigue del teorema anterior que $z \in C$ si y solo si $(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$ si y solo si $(S(z), w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}$ si y solo si $S(z) \in C_2$ una circunferencia. □

66 Corolario. Dadas C_1, C_2 circunferencias en $\mathbb{C}_\infty$ existe una transformación de Möbius T tal que $T(C_1) = C_2$.

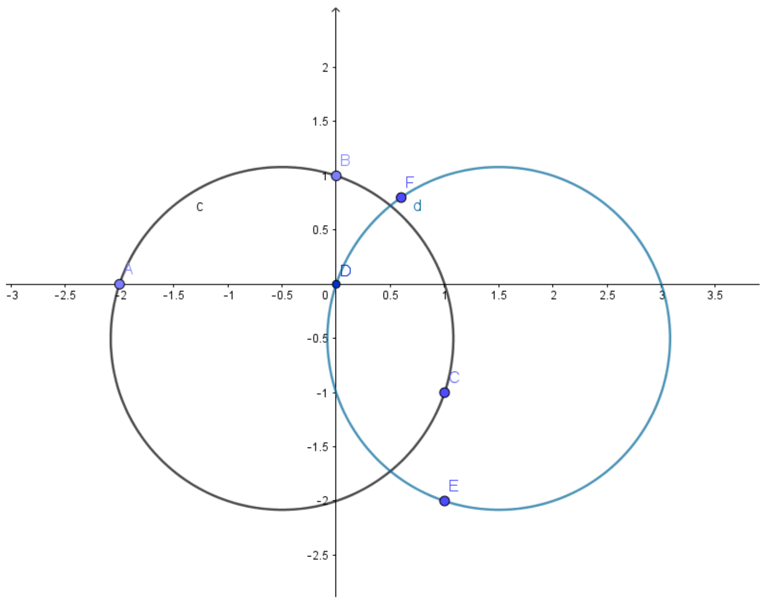
Demostración. Sean C_1 y C_2 circunferencias en $\mathbb{C}_\infty$ y sean $z_1, z_2, z_3 \in C_1$, $w_1, w_2, w_3 \in C_2$. Si $R(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$, $S(z) = (z, w_1, w_2, w_3)$. Entonces $T = S^{-1} \circ R$ manda C_1 a C_2. En efecto, puesto que $T(z_j) = w_j$ por la proposición anterior se sigue que $T(C_1) = C_2$.

□

Note que si se determinan $z_1, z_2, z_3 \in C_1$ y $w_1, w_2, w_3 \in C_2$ existe una única T tal que $T(z_j) = w_j$, para $j = 1, 2, 3$ y por tanto T es la única que $T(C_1) = C_2$.

67 Ejemplo. La imagen de la circunferencia determinada por los puntos $(-2, 0), (0, 1), (1, -1)$ bajo la acción de la función $T(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ es la determinada por los puntos $(0, 0), (1, -2)\ (3/5, 4/5)$.

68 Observación. Con todos los resultados obtenidos nos encontramos que tenemos herramienta para transformar lineas en circunferencias y viceversa (esto es consecuencia de que las rectas son circunferencias con radio infinito).



A continuación se mostrarán algunos ejemplos de como construir funciones que transformen por ejemplo, el interior de una circunferencia en un semiplano determinado.

69 Ejemplo. Hallar una transformación de Möbius que mande el conjunto $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z - z_0| < r_1\}$ en $\{w \in \mathbb{C}_\infty : |w - w_0| > r_1\}$.

Solución. Para simplificar cálculos trasladamos la circunferencia al origen esto es $T_1(z) = z - z_0$, y ahí mediante una inversión, $T_2(z) = 1/z$ transformamos el interior de la circunferencia en el exterior de esta, formalmente, transformamos A $= \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| < r_1\}$ en $W = \{w \in \mathbb{C}_\infty : |w| > r_1\}$. El lector puede verificar que al tomar un punto con módulo menor que r_1 su imagen por la inversión es un elemento de W. Y finalmente aplicando una traslación a w_0, $T_3 = z + w_0$ obtenemos lo pedido, es decir, la transformación de Möbius que transforma A en W es la composición (en ese orden) de las transformaciones anteriores, $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$. □

70 Ejercicio. Encontrar una transformación de Möbius que mapee el conjunto $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z - z_0| < r_1\}$ en el conjunto $W = \{w \in \mathbb{C}_\infty : |w - w_0| > r_2\}$ con $r_1 \neq r_2$.

71 Ejemplo. Hallar una transformación de Möbius que aplique el semiplano superior en la circunferencia unitaria. Demostrar las afirmaciones.

Solución. Este problema se puede resolver de distintas formas, aquí solo se exponen dos, una algebraica y la segunda utiliza un propiedad fuerte de las transformaciones de Möbius.
Veamos primero la algebraica.
Considere la transformación siguiente,

$$T(z) = \frac{i - z}{i + z}$$

Esta función es tal que

$$
\begin{aligned}
T(-1) &= \frac{i+1}{i-1}\frac{-i-1}{-i-1} = -i \\
T(0) &= \frac{i}{i} = 1 \\
T(1) &= \frac{i-1}{i+1}\frac{1-i}{1-i} = i \\
T(\infty) &= \frac{i/z-1}{i/z+1} = -1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto T transforma la recta real en la circunferencia unitaria $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Hacer el análisis con T es complicado en la forma que presenta, así que la escribimos en la siguiente forma más sencilla,

$$T(z) = -1 + \frac{2i}{z+i}$$

Considerando solo la función $S(z) = \dfrac{2i}{z+i}$, sustituimos $z = x + iy$,

$$S(x+iy) = \frac{2i}{x+iy+i}$$

haciendo la factorización y multiplicando por el conjugado resulta lo siguiente,

$$S(x,y) = u + iv$$

con,

$$u = \frac{2(1+y)}{x^2+(1+y)^2}, \quad v = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}$$

Ahora vamos a tomar una parametrización del semiplano superior complejo utilizando lineas horizontales y vamos a ver su imagen bajo S, y finalmente se hará variar el parámetro t para tener el resultado general. Sea t un numero real fijo no negativo y considérese el conjunto C=$\{(x,y) : y = t, t \geq 0\}$. Por lo anterior vamos a tratar de escribir a u y v en función del parámetro t. Así que dividiendo u entre v se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{v} = \frac{2(1+y)}{2x} &= \frac{(1+t)}{x} \\
&\Rightarrow x = (1+t)\frac{v}{u}
\end{aligned}
$$

o sea,

$$x^2 = (1+t)^2 \frac{v^2}{u^2}$$

Sustituyendo en u tenemos,

$$\begin{aligned} u = \frac{2(1+t)}{(1+t)^2 \frac{v^2}{u^2} + (1+t)^2} &= \frac{2u^2}{(1+t)v^2 + (1+t)u^2} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{2u}{(1+t)u^2 + (1+t)v^2} \end{aligned}$$

Despejando se obtiene

$$(1+t)v^2 + (1+t)u^2 - 2u = 0$$

Completando el cuadrado y reagrupando se obtiene

$$v^2 + (u - \frac{1}{1+t})^2 = \frac{1}{(1+t)^2},\ t \geq 0.$$

Notamos que la ecuación anterior es la ecuación de una circunferencia de centro $(\frac{1}{1+t}, 0)$ y radio $\dfrac{1}{1+t}$.

Recordemos que el análisis fue solo hecho para la función $S(z) = \dfrac{2i}{z+i}$ que transforma el eje real en la circunferencia centrada en $(1,0)$ y radio 1 pero ya que una figura geométrica no se modificada en su forma por traslaciones, dilataciones y rotaciones entonces $T(z)$ transforma el eje real en la circunferencia unitaria.

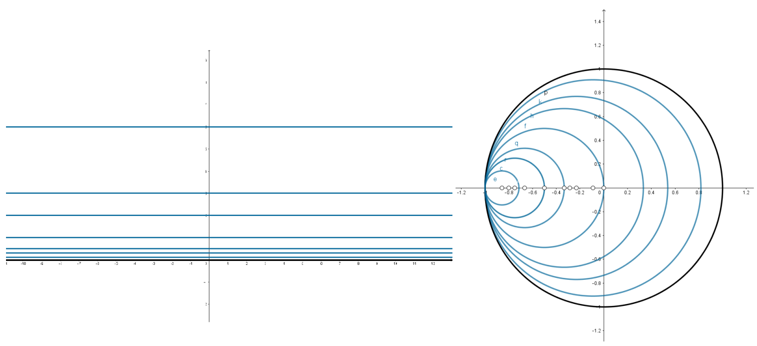


Figura 2.2: La transformación T manda el semiplano superior en el disco unitario.

El método alternativo, que no requiere mucho esfuerzo, utiliza la propiedad fuerte de T de ser un homeomorfismo, pues como la recta real se transforma en la circunferencia unitaria, esta recta genera dos conjuntos conexos, esto implica que el interior de la circunferencia unitaria es la imagen de alguno de los dos semiplanos ya que si no fuera así, esto contradice el hecho que las funciones continuas mandan conjuntos conexos en conjuntos conexos. Por lo tanto para

saber que puntos ha mapeado una transformación de Möbius al interior de la circunferencia solo basta tomar un punto de prueba y ver su imagen por T, en nuestro caso, $T(i) = 0$, esto prueba que el semiplano superior es transformado en el circulo unitario.
Note que este razonamiento es más general y depende poco de T. $\square$

Como podemos ver de los ejercicios resueltos y propuestos, todo semiplano y todo disco, o más generalmente, cualesquiera dos discos son equivalentes (si los planos son pensamos como discos de radio infinito) *i.e.* se puede obtener uno a partir del otro mediante restricciones de las transformaciones de Möbius.

72 Ejercicio. Encuentre una transformación de Möbius que mande el conjunto $\mathsf{A} = \{z : 2\mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(x) + 1\}$ en $\mathsf{B} = \{z : |z+1| = 2\}$

2.2. Clasificación de la transformaciones de Möbius.

Se presentan algunas clasificaciones de las transformaciones de Möbius, una se hace mediante sus puntos fijos y otra mediante una versión modificada de la traza de estas matrices que se especificara unas lineas después.

Clases de conjugación.

73 Definición. Se dice que dos transformaciones S y T en Möb($\mathbb{C}_\infty$) son conjugadas si existe W en Möb($\mathbb{C}_\infty$) tal que,

$$S = W \circ T \circ W^{-1}. \tag{2.13}$$

Note que esta relación (la relación de conjugación) es una relación de equivalencia en Möb($\mathbb{C}_\infty$) que clasifica particionando el conjunto Möb($\mathbb{C}_\infty$) en clases disjuntas llamadas clases de conjugación donde la identidad es el único elemento en su clase.

74 Ejercicio. Demuestre que las matrices siguientes son conjugadas

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Vemos que si dos transformaciones son conjugadas entonces tienen el mismo número de puntos fijos. Por ejemplo, suponga que S y T son transformaciones de Möbius conjugadas, $S = W \circ T \circ W^{-1}$ y suponga que S tiene dos puntos fijos distintos z_1, z_2. Entonces,

$$z_1 = S(z_1) = W \circ T \circ W^{-1}(z_1) \Rightarrow W^{-1}(z_1) = T \circ W^{-1}(z_1) \tag{2.14}$$

por lo que $W^{-1}(z_1)$ es punto fijo de T y de forma similar, $W^{-1}(z_2)$ también es punto fijo de T distinto de $W^{-1}(z_1)$.

Clasificación de las clases de conjugación por puntos fijos.

Si bien, en el apartado anterior ya se llevo a cabo una clasificación de Möb($\mathbb{C}_\infty$), ahora se hace una nueva clasificación con las clases de conjugación utilizando los puntos fijos.
Sea T una transformación de Möbius no igual a la identidad tal que T tiene un único punto fijo $z \in \mathbb{C}_\infty$ y sea w en $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z\}$. Existe una transformación de Möbius S que manda $(z, w, T(w))$ en (∞,0,1). Entonces $S \circ T \circ S^{-1}$ tiene como punto fijo a ∞ pues

$$S \circ T \circ S^{-1}(\infty) = S(T(z)) = S(z) = \infty$$

Por lo tanto $c = 0$, luego tiene la forma $S \circ T \circ S^{-1}(z) = az + b$.
Afirmamos que esta es una traslación, $i.e$, a=1. En efecto, si $a \neq 1$ entonces $g \circ T \circ g^{-1}(z)$ tiene otro punto fijo $z = \frac{b}{1-a}$ distinto de infinito que no es posible.
Finalmente como $S \circ T \circ S^{-1}(0) = S(T(w)) = 1$, entonces, $S \circ T \circ S^{-1}(z) = z + 1$.
Se puede demostrar (ejercicio) que todas las traslaciones que no sean la identidad son conjugadas entre si, por lo que el conjunto con un único punto fijo son las traslaciones y a las transformaciones de Möbius que tienen un punto fijo en $\mathbb{C}_\infty$, *i.e.*, las conjugadas de $z+1$ (para simplificar las cosas) se les llama *parabólicas.*

Supongamos ahora que una transformación T fija dos puntos distintos y sean estos, α, β. Sea W una transformación de Möbius tal que $W(\alpha) = 0$ y $W(\beta) = \infty$, digamos,

$$W(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}. \tag{2.15}$$

Nuestro trabajo es encontrar un buen representante de la clase de conjugación de T mediante W.
Procediendo como antes,

$$W \circ T \circ W^{-1}(\infty) = W(T(\beta)) = W(\beta) = \infty$$

y

$$W \circ T \circ W^{-1}(0) = W(T(\alpha)) = W(\alpha) = 0$$

Entonces, $W \circ T \circ W^{-1} = az$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
Tenemos varios casos, si $|a| = 1$ ya vimos que esta es una rotación del plano y podemos escribirla como $W \circ T \circ W^{-1} = e^{i\theta} z$, donde $0 \leq \theta < 2\pi$.
Si $|a| \neq 1$ podemos reescribir esta función como $W \circ T \circ W^{-1} = |a|(\dfrac{a}{|a|})z$, la cual es la composición de una dilatación y una homotecia. Se tiene entonces la siguiente definición.

75 Definición. Sea T una transformación de Möbius tal que deja fijos dos puntos distintos. Entonces,

1) T es *elíptica* si es conjugada a $S(z) = az$, $|a| = 1$.
2) T es *hiperbólica* si es conjugada a $S(z) = az$, si $a > 0$.
3) T es *loxodrómica* si es conjugada a $S(z) = az$, con $|a| \neq 1$ y $a \notin \mathbb{R}^+$.

76 Ejemplo. Sea $S(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ con puntos fijos i y $-i$. Consideramos W igual que antes,

$$W(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

Entonces

$$W \circ S \circ W^{-1}(z) = \left(\frac{1+i}{i-1}\right) z$$

Como $\left(\frac{1+i}{i-1}\right)$ tiene módulo 1, entonces S es elíptica.

Clasificación mediante la traza.

Recuerde que dada una matriz cuadrada A, la traza de A, $\mathfrak{tr}(\mathrm{A})$, se define como la suma de las entradas en la diagonal principal, más precisamente podemos definir, $\mathfrak{tr} : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Sea S una transformación de Möbuis. En $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ existen dos matrices asociadas a S, A y $-A$, y se ve que $\mathfrak{tr}(-A) = -\mathfrak{tr}(A)$. Claramente la regla que a cada transformación de Möbius le asigna la traza de su matriz asociada en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ no es una función. La siguiente definición evita este problema y nos da otra manera de ver la clasificación de las transformaciones de Möbius por puntos fijos.

77 Definición. Sea S una transformación de Möbius $S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ y sea A_S una de las dos matrices asociadas a S tal que $ad-bc = 1$. Se define $\mathcal{T} : \mathrm{Möb}(2, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ como $\mathcal{T}(S) = (\mathfrak{tr}(A_S))^2$.

78 Proposición. *Si W, S son transformaciones de Möbius conjugadas entonces $\mathcal{T}(W) = \mathcal{T}(S)$.*

Demostración. Como S y W son conjugadas existe V transformación de Möbius tal que $W = V \circ S \circ V^{-1}$. Sean A y B matrices asociadas a V y S respectivamente. Se tiene

$$\mathcal{T}(W) = \mathcal{T}(V \circ S \circ V^{-1}) = (\mathfrak{tr}(ABA^{-1}))^2 = (\mathfrak{tr}(B))^2 = \mathcal{T}(S)$$

□

Sea S una transformación de Möbius, suponga que $c \neq 0$. Sabemos que

$$z = \frac{a - d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$$

son los puntos fijos de S. El discriminante nos dice implícitamente el número de puntos fijos. Ya que $ad - bc = 1$, el discriminante se puede escribir como

$$D = (a-d)^2 + 4bc = \mathcal{T}(S) - 4. \tag{2.16}$$

79 Teorema. *Sea S una transformación de Möbius distinta de la identidad. Entonces:*

a) S es parabólica si y solo si $\mathcal{T}(S) = 4$.

b) S es elíptica si y solo si $\mathcal{T}(S) \in [0, 4)$.

c) S hiperbólica si y solo si $\mathcal{T}(S) \in (4, \infty)$.

80 Ejemplo. a) Sean $T_1(z) = \dfrac{z+1}{z+2}$ y $T_2(z) = -\dfrac{1}{z}$, entonces T_1 es hiperbólica y T_2 es elíptica.

b) Sea $S(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ entonces $\mathcal{T}(S) = 4$, lo cual nos dice que S es parabólica, pero en un ejemplo anterior vimos que S era elíptica, ¿cual es el problema entonces? La respuesta es que cometí un pequeño error didáctico. En realidad para aplicar el teorema anterior, la matriz asociada a S debe estar normalizada cosa que S no cumple. Verifique amable lector, que al ser normalizada, $\mathcal{T}(S) = 2$.

81 Ejercicio. Intente demostrar el recíproco de la proposición 74.

Capítulo 3

Biholomorfismos en el plano extendido. El teorema de Riemann.

3.1. Transformaciones de Möbius como automorfismos.

Se define el disco unitario y el semiplano superior complejo respectivamente como sigue,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im(z)} > 0\}.$$

82 Definición. Sean D_1 y D_2, $\subseteq \mathbb{C}$ regiones (abiertos conexos). Una función biyectiva $f : D_1 \to D_2$ se dice que es un *biholomorfismo* si f y f^{-1} son holomorfas.
Si $D_1 = D_2 = D$ entonces f se dice un *automorfismo* de D. Y en particular denotamos por $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ el conjunto de automorfismos del disco unitario.

Se caracterizará el conjunto de automorfismos del disco unidad y deducir propiedades de estos. Se comienza con el siguiente resultado importante.

83 Teorema (Lema de Schwarz). *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $f(0) = 0$ y tal que $|f(z)| \leq 1$, para toda $z \in \mathbb{D}$. Entonces,*

I. $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{D}$, *y* $|f^{'}(0)| \leq 1$.

II. *Si además existe $z_0 \in \mathbb{D}$ no nulo tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, o $|f^{'}(0)| = 1$ entonces*

$f(z) = az$, *con* $|a| = 1$.

Demostración. Sea $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por,

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & si \quad z \neq 0 \\ \\ f^{'}(0) & si \quad z = 0 \end{cases}$$

Es claro que g es holomorfa en $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ y continua en $\mathbb{D}$, por lo que g tiene límite en 0, por el teorema de Riemann de singularidades evitables g es holomorfa en $\mathbb{D}$. Por hipótesis, $|g(z)| = |\frac{f(z)}{z}| \leq \frac{1}{|z|}$ para $z \in D(0,r)\setminus\{0\}$ con $0<r<1$. Por el teorema del módulo máximo [1] se tiene que

$$\text{máx}\left\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0,r)\right\} = \text{máx}\left\{|g(z)| : z \in \partial D(0,r)\right\} = \text{máx}\left\{|\frac{f(z)}{z}| : z \in \partial D(0,r)\right\} \leq \frac{1}{r}.$$

Cuando $r \to 1$ se obtiene que $|g(z)| \leq 1$ para toda $z \in \mathbb{D}$, es decir, $|f(z)| \leq |z|$ para $z \in \mathbb{D}$. Supongamos ahora que existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ o $|f^{'}(0)| = 1$ entonces $|g(z)| = 1$ para $z = z_0$ o $z = 0$, es decir, g tiene un máximo en $z = z_0$ o $z = 0$, por el principio del módulo máximo[2] se debe tener que $g(z) = c$, con $|c| = 1$, por lo que $f(z) = cz$. □

84 Ejercicio. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorfismo tal que $f(0) = 0$. Entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta}z$.

85 Definición. Sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $|a| < 1$, se define a la función $\varphi_a : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ como sigue:

$$\varphi_a(z) = \begin{cases} \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} & si \quad z \neq \frac{1}{\overline{a}} \\ -\frac{1}{\overline{a}} & si \quad z = \infty \\ \infty & si \quad z = \frac{1}{\overline{a}} \end{cases} \tag{3.1}$$

La función φ_a así definida es una transformación de Möbius y cuenta con las siguientes propiedades:

- $\varphi_a(a) = 0$ y $\varphi_a(0) = -a$.
- $(\varphi_a)^{-1}(z) = \varphi_{-a}(z)$.
- φ_a tiene un polo de orden 1 en $z = \frac{1}{\overline{a}}$

Propiedades de la derivada de φ_a.

- $(\varphi_a)'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}$.
- $(\varphi_a)'(a) = \frac{1}{1-|a|}$ y $(\varphi_a)'(0) = 1-|a|^2$.

[1] **Teorema del módulo máximo para regiones acotadas.** Sea Ω región acotada, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua. Entonces $\text{máx}\left\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\right\} = \text{máx}\left\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\right\}$.

[2] **Teorema del módulo máximo.** Sea Ω una región y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para toda $z \in \Omega$, entonces f es constante.

- $(\varphi_a^{-1})'(z) = (\varphi_{-a})'(z)$.

Se verá a continuación que los automorfismos de $\mathbb{D}$ son precisamente de la forma φ_a.

86 Proposición. *El disco $\mathbb{D}$ es invariante bajo la función φ_a; esto es, $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{D}$ entonces,

$$\begin{aligned}
&|\varphi_a(z)|^2 < 1 \Leftrightarrow |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2 \\
&\Leftrightarrow |a|^2 + |z|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \\
&\Leftrightarrow (1-|a|^2)(1-|z|^2) > 0 \\
&\Leftrightarrow |z| < 1.
\end{aligned}$$

Note que todas las desigualdades estrictas pueden ser sustituidas por igualdades, lo que prueba que la frontera del disco también es invariante bajo la función φ_a. $\square$

87 Teorema. *Sea $f \in$ Aut($\mathbb{D}$). Entonces existe $c \in \mathbb{C}$, con $|c| = 1$, tal que $f(z) = c\varphi_a(z)$, con $a \in \mathbb{D}$. Esto es, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}. \tag{3.2}$$

Demostración. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y sea $a = f^{-1}(0)$. Se define $g(z) := f \circ \varphi_a^{-1}(z) = f \circ \varphi_{-a}(z)$ entonces $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Se ve de inmediato que $g(0) = 0$, por tanto, por el lema de Schwarz $|g'(0)| \leq 1$.

Por otro lado la derivada de $g(z)$ es

$$g'(z) = f'(\varphi_{-a}(z))\varphi'_{-a}(z)$$

Entonces,

$$g'(0) = f'(a)(1-|a|^2) \tag{3.3}$$

y

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{1-|a|^2}.$$

De la misma forma $g^{-1}(0) = 0$ y por el lema de Schwarz, $|(g^{-1})'(0)| \leq 1$.

Como $g^{-1} = \varphi_a \circ f^{-1}$ y de las propiedades de φ'_a

$$\begin{aligned}
(g^{-1})'(z) &= \varphi'_a(f^{-1}(z)) \circ (f^{-1})'(z) \\
\Rightarrow (g^{-1})'(0) &= \frac{(f^{-1})'(0)}{1-|a|^2}
\end{aligned}$$

pues $f(a) = 0$.
Por hipótesis el lema de Schwarz

$$|(g^{-1})'(0)| = \Big|\frac{(f^{-1})'(0)}{1-|a|^2}\Big| \le 1 \Longrightarrow |(f^{-1})'(0)| \le 1-|a|^2$$

Puesto que $f^{-1} \circ f(z) = z$ la regla de la cadena nos da $(f^{-1})'(f(z))f'(z) = 1$

$$(f^{-1})'(f(a))f'(a) = (f^{-1})'(0)f'(a) = 1$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-|a|^2} \le \frac{1}{|(f^{-1})'(0)|} &= |f'(a)| \le \frac{1}{1-|a|^2} \\ &\Longrightarrow |f'(a)| = \frac{1}{1-|a|^2}. \end{aligned}$$

De la ecuación (3,3) se tiene que

$$|g'(0)| = |f'(a)(1-|a|^2)| = \frac{1-|a|^2}{1-|a|^2} = 1$$

Por el punto 2 del lema de Schwarz $g(z) = cz$, con $|c| = 1$, equivalentemente

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

□

88 Proposición (Lema de Schwarz-Pick)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Supongase que $|f(z)| \le 1$ para toda z. Entonces para $a_1, a_2, z \in \mathbb{D}$,*

$$\Big|\frac{f(a_2)-f(a_1)}{1-\overline{f(a_1)}f(a_2))}\Big| \le \Big|\frac{a_2-a_1}{1-\overline{a_1}a_2}\Big| \tag{3.4}$$

$$|f'(z)| \le \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2} \tag{3.5}$$

Demostración. Dados a_1, a_2 en el disco, sean $f(a_1) = b_1$ y $f(a_2) = b_2$, defina $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ como

$$g(z) = \varphi_{b_1} \circ f \circ \varphi_{-a_1}(z)$$

La cual cumple que $g(0) = 0$ y $|g(z)| < 1$ para toda z, por el Lema de Schwarz

$$|g(z)| = |\varphi_{b_1} \circ f \circ \varphi_{-a_1}(z)| \le |z|.$$

Poniendo $z = \varphi_{a_1}(a_2)$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_{b_1} \circ f(a_2)| &\leq |\varphi_{a_1}(a_2)| \\ |\varphi_{b_1}(b_2)| &\leq |\varphi_{a_1}(a_2)| \end{aligned}$$

Lo anterior es por definición lo mismo que

$$\left|\frac{b_2 - b_1}{1 - \overline{b_1}b_2}\right| \leq \left|\frac{a_2 - a_1}{1 - \overline{a_1}a_2}\right|$$

Para ver la última parte tomamos $a_1 = a$ y $a_2 = z$ en la desigualdad anterior

$$\left|\frac{f(z) - f(a)}{z - a}\right| \leq \left|\frac{1 - \overline{f(a)}f(z)}{1 - \overline{a}z}\right| \tag{3.6}$$

Tomando el límite cuando z tiende a a,

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}. \tag{3.7}$$

□

Una vez caracterizado a $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ vamos intentar también caracterizar a los automorfismos de $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}_\infty$.

89 Proposición. *El conjunto de los biholomorfismos de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$ son de la forma*

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \tag{3.8}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $Im(z_0) > 0$.

Demostración. Sea T una transformación de Möbius en $\mathbb{C}_\infty$. Queremos que el eje imaginario se mapee al circulo unitario, deben pues, las imágenes de los puntos $0, 1\infty$ tener módulo 1 y por lo tanto $c \neq 0$ y T tiene la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Condicionemos los coeficientes de T a fin de que las imágenes de los puntos tengan módulo 1. Sabemos que la imagen de ∞ es el punto $\dfrac{a}{c}$ al cual imponemos $\left|\dfrac{a}{c}\right| = 1$ o bien, $|a| = |c| \neq 0$ por suposición. Con $z = 0$, su imagen bajo T es $\dfrac{b}{d}$ e igualmente que antes $|b| = |d| \neq 0$ por ser T transformación de Möbius. Como a, b son distintos de 0, escribimos

$$T(z) = \left(\frac{a}{c}\right)\frac{z + b/a}{z + d/c}$$

Puesto que $\left|\frac{a}{c}\right| = 1$, existe θ en $\mathbb{R}$ tal que

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - z_1}$$

con $z_0 = -b/a, z_1 = -d/c$. Como

$$\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{d}{c}\right|$$

se ve que $|z_1| = |z_0|$ Por último, la imagen de $z = 1$ debe tener módulo 1, por lo que

$$|T(z)| = \frac{|z - z_0|}{|z - z_1|} = 1 \Rightarrow |z - z_0| = |z - z_1|$$
$$(1 - z_1)(1 - \overline{z_1}) = (1 - z_0)(1 - \overline{z_0})$$

Dado que $|z_1| = |z_0|$, $z_1\overline{z_1} = z_0\overline{z_0}$. Desarrollando resulta $z_1 + \overline{z_1} = z_0 + \overline{z_0}$, o sea $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_0)$. Entonces, $z_1 = z_0$ o $z_1 = \overline{z_0}$, y como T no es constante $z_1 = \overline{z_0}$. Luego

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \tag{3.9}$$

Como $T(z_0) = 0$ y queremos que T transforme el semiplano superior en el interior del disco unitario, entonces $\mathrm{Im}(z_0) > 0$. Vea [4]. $\square$

En particular, la transformación

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i} \tag{3.10}$$

cumple con las hipótesis del teorema con $z_0 = i$ y $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ y recibe el nombre especial de **transformación de Cayley**.

90 Ejercicio. Usando la transformación de Cayley, demostrar que cada elemento $\varphi \in \mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ puede ser escrito de la siguiente manera,

$$\varphi(z) = \tau\frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z} \tag{3.11}$$

para algunos $\tau \in \partial\mathbb{D}$ y $\alpha \in \mathbb{D}$.

91 Ejercicio. Usando la transformación de Cayley, demostrar que cada elemento $\varphi \in \mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ puede ser escrito de la siguiente manera,

$$\varphi(z) = \frac{\alpha - \beta z}{1 - \overline{\alpha}\beta z} \tag{3.12}$$

para algunos $\alpha \in \mathbb{D}$ y $\beta \in \partial\mathbb{D}$.

92 Teorema. *El conjunto de automorfismos del semiplano superior se caracteriza como sigue:*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{\frac{az+b}{cz+d} : ad-bc>0,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\}. \tag{3.13}$$

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{\frac{az+b}{cz+d} : ad-bc>0, a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$. Tomamos $T\in\mathcal{A}$, ponemos $z=x+iy$ tal que $y>0$ ($z\in\mathbb{H}$), sustituimos en $T(z)$, multiplicamos arriba y abajo por el conjugado de $cz+d$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{ac(x^2+y^2)+x(ad+bc)+bd+y(ad-bc)i}{|cz+d|^2}$$

Notamos que $\mathrm{Im}(T(z)) = \dfrac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2}$ y por hipótesis $\det T>0$. Por lo tanto $\mathcal{A}\subseteq$Aut$(\mathbb{H})$.
Ahora, sea T es un automorfismo de $\mathbb{H}$ entonces, primero vamos a ver que T es una transformación de Möbius. En efecto, considere la transformación de Cayley, dada anteriormente y defina $S:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ como $S := C\circ T\circ C^{-1}$, por lo que $S\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ implica que $T\in\mathrm{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$. Ahora, como S es un automorfismo del disco unidad, S es de la forma,

$$S(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},\quad a\in\mathbb{D}$$

Como $T = C^{-1}\circ S\circ C$ y $C^{-1}(w) = \dfrac{iw+i}{1-w}$, $T(z)$ se reduce a,

$$\begin{aligned} T(z) = \frac{(2i-(a+\overline{a}))z+a-\overline{a}}{(a-\overline{a})z+2i+i(a+\overline{a})} &= \frac{(2-2\mathrm{Re}(a))iz+2\mathrm{Im}(a)i}{2\mathrm{Im}(a)iz+(2+2\mathrm{Re}(a))i} \\ &= \frac{(2-2\mathrm{Re}(a))z+2\mathrm{Im}(a)}{2\mathrm{Im}(a)z+(2+2\mathrm{Re}(a))} \end{aligned}$$

Entonces $T(z)$ tiene coeficientes reales y con determinante $\det(T) = (2-2\mathrm{Re}(a))(2+2\mathrm{Re}(a)) - (2\mathrm{Im}(a))(2\mathrm{Im}(a)) = 4-4(\mathrm{Re}(a)^2+\mathrm{Im}(a)^2) = 4-4(|a|^2)>0$. □

Existe un análogo al lema de Schwarz-Pick para $\mathbb{H}$.

93 Proposición. *Sea $f\in\mathcal{H}(\mathbb{H})$ y sean $z_1,z_2\in\mathbb{D}$. Entonces*

$$\Big|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{\overline{f(z_1)}-f(z_2)}\Big| \le \Big|\frac{z_1-z_2}{\overline{z_1}-z_2}\Big|. \tag{3.14}$$

94 Teorema. *Los automorfismos de $\mathbb{C}_\infty$ son precisamente las transformaciones de Möbius, es decir,* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ =*Möb*$(\mathbb{C}_\infty)$.

Demostración. En [10], puede ver una demostración de este teorema.

□

95 Teorema. *Sea $T(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorfismo, entonces T es una función lineal (no transformación lineal), es decir, $T(z) = az + b$.*

Demostración. Sea $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ el cual podemos extender a $\mathbb{C}_\infty$ si definimos $T(\infty) = \infty$. Entonces $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$, luego por el teorema anterior, $T \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C}_\infty)$ y por la extensión de las transformaciones de Möbius a $\mathbb{C}_\infty$, entonces $T(z) = az + b$.

□

3.2. El teorema del mapeo de Riemann.

Por último, vamos a terminar nuestra caracterización con un teorema fuerte del análisis complejo que es teorema del mapeo de Riemann, del cual solo se ven algunos ejemplos y pequeños consecuencias, pues este teorema necesita mucha herramienta que no fue expuesta. Comenzamos definiendo algunos conceptos.

96 Definición. Decimos que dos regiones G_1 y G_2 son conformes o conformemente equivalentes si existe un biholomorfismo $f : G_1 \to G_2$. Claramente la relación de ser conforme es una relación de equivalencia.

97 Ejemplo. Ya vimos en los ejercicios anteriores que por las transformaciones de Möbius, cualquier disco abierto es conformemente equivalente al disco unitario, y por consiguiente cualesquiera dos discos abiertos son conformemente equivalentes.

98 Ejemplo. Los mismos ejercicios sirven para probar que todo disco abierto es equivalente a cualquier semiplano dado.

99 Ejemplo. El teorema de Liouville[3] dice que el plano complejo $\mathbb{C}$ no es equivalente al disco unitario. En efecto, si esto sucediera tal función no seria suprayectiva.

100 Definición. Se dice que una región Ω es simplemente conexa si su complemento respecto al plano ampliado es conexo.

De manera intuitiva, un conjunto es simplemente conexo si para cualquier curva simple cerrada contenida en el conjunto, la porción de espacio que encierra la curva esta contenida en el conjunto.

Claramente cualquier semiplano y disco en el plano ampliado son simplemente conexos. Un corolario del teorema de Riemann (que extiende estos resultados) muestra que cualesquiera conjuntos simplemente conexos son equivalentes.

[3]**Teorema de Liouville.** Si f es holomorfa en todo el plano y acotada, entonces f es constante.

101 Teorema (Teorema de Riemann)**.** *Si* $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ *es abierto y simplemente conexo, entonces* Ω *es conformemente equivalente al disco unitario* $\mathbb{D}$*.*

Demostración. La demostración de este teorema puede verlo, por ejemplo en [2].

□

Como el lector podrá notar, en la demostración del teorema (ademas de ser muy complicada) solo se aseguró la existencia de la función pero no da un método para construirla. Es claro que bajo esta relación de equivalencia el conjunto cociente consiste de solo dos elementos, a saber, la clase representada por el disco unidad $\mathbb{D}$ y $\mathbb{C}$.

102 Corolario. Sean G_1 y G_2, abiertos simplemente conexos. Entonces existe un biholomorfismo entre G_1 y G_2.

Demostración. Por el teorema de Riemann, existen dos biyecciones holomorfas $f : G_1 \to \mathbb{D}$ y $g : G_2 \to \mathbb{D}$. Entonces la función $h = g^{-1} \circ f : G_1 \to G_2$ es una biyección holomorfa.

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & G_2 \\ & \mathbb{D} \arrow[u, "g^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

□

103 Problema. Investigue una definición más precisa de conjunto simplemente conexo y pruebe que si $\Omega \subset \mathbb{D}$ es una región conformemente equivalente a una región simplemente conexa, demostrar que Ω es simplemente conexo.

104 Ejemplo. Encontrar un biholomorfismo entre los conjuntos $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ y el disco $\mathbb{D}$.

Solución. Considere las siguientes aplicaciones:

$$S_1(z) = e^{i\pi/2}z \longrightarrow S_2(z) = \left(\frac{z+1}{-z+1}\right)^2 \longrightarrow S_3(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

En efecto, la función S_1 rota nuestro conjunto al semiplano superior, mientras que S_2 transforma el semicirculo unitario en el semiplano superior y por último, S_3 es la transformación de Cayley que manda el semiplano superior al disco unitario. Por lo que nuestra función buscada es $T = S_3 \circ S_2 \circ S_1$. □

Bibliografía

[1] Zill, Dennis G.; Shanahan, Patrick D.: A first course in complex analysis with applications. 1st edition. Jones and Bartlett Publishers, Inc., 2003.

[2] Zaldívar, Felipe: Teoría de funciones de una variable compleja, 2012.

[3] Conway, John B.: Functions of one complex variable. 2nd edition. Springer-Verlag, New York Inc., 1978.

[4] Churchill, Ruel V.; Ward Brown, James: Complex variables and applications . 8th edition. McGraw-Hill, 2009.

[5] Olsen, John: The geometry of Möbius transformations. University of Rochester, New York, 2010.

[6] Hidalgo Solís, Laura: Variable compleja. Notas de clase, 2010.

[7] Rodríguez Sánchez, Angel: Algunos resultados sobre grupos Kleinianos, superficies de Riemann y grupos de Lie, Facultad de ciencias físico matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2013.

[8] Ruiz Sánchez, Carlos: La compactificación de Alexandrov, Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia.

[9] Ahlfors, Lars V.: Complex analysis, an introduction to the theory of analitic functions of one complex variable. 2nd edition. McGraw-Hill, Inc., 1966.

[10] Barrera Castelan., Roberto M.: Propiedades espectrales de matrices y operadores de Toeplitz. Proyecto de investigacion IPN-SIP 20130633.

Complementaria.

[11] Ullrich, David C.: Complex made simple. American Mathematical Society. Editorial Board, 2008.

[12] Needham, Tristan: Visual complex analysis. Oxford University Press, 2000.

[13] Möbius Transformations Revealed, short video, 2007.
http://www.ima.umn.edu/~arnold/moebius/index.html