El teorema de Banach–Steinhaus.
Principio de acotación uniforme.
(Un tema del curso "Análisis funcional")

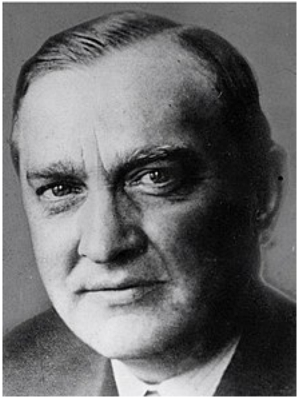
Antonio Jimárez Escamilla
con sugerencias de Egor Maximenko.

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

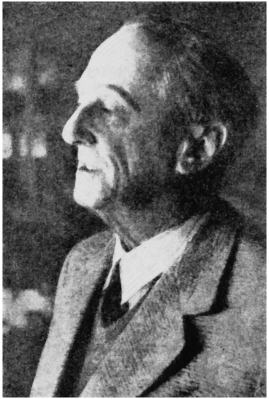
18 de noviembre de 2020

Plan

Personajes



(a) Stefan Banach



(b) Hugo Steinhaus

Objetivos

1. Demostrar el teorema de Banach–Steinhaus sobre el principio de acotación uniforme.
2. Dar un criterio para conjuntos acotados.

Prerrequisitos

1. Teorema de Baire.
2. Conjuntos cerrados.
3. Preimagenes de conjuntos cerrados bajo funciones continuas.
4. Espacios de Banach.
5. Teorema Hahn-Banach.
6. Propiedades de bolas en espacios normados.
7. Transformación lineal acotada.

Plan

Un corolario del teorema de Baire (repaso)

Si Y es un espacio métrico completo no vacío, entonces Y no es magro.

Esto significa que

$$\forall (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^Y)^{\mathbb{N}} \quad \left(Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \right) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) \neq \emptyset \Big).$$

Conjuntos cerrados.

Proposición

Sea X un espacio métrico. Sea $(A_n)_{n\in I}$ una familia de conjuntos cerrados en X. Entonces $\bigcap_{n\in I} A_n$ es cerrado.

Conjuntos cerrados.

Proposición

Sea X un espacio métrico. Sea $(A_n)_{n\in I}$ una familia de conjuntos cerrados en X. Entonces $\bigcap_{n\in I} A_n$ es cerrado.

Proposición

Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \to Y$ una función continua.
Sea D un conjunto cerrado en Y.
Entonces $f^{-1}(D)$ es un conjunto cerrado en X.

Corolario del teorema de Hahn-Banach (repaso)

Denotamos por $V^* = B(V, \mathbb{C})$.

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $x \in V$.
Entonces existe $f \in V^*$ tal que $\|f\| \leq 1$ y $f(x) = \|x\|$.

Plan

Lema 1

Sea X un espacio de Banach y sea Y un espacio normado.
Sea F un subconjunto de $\mathcal{B}(X,Y)$ tal que

$$\forall x \in X \quad \sup_{T\in F} \|T(x)\|_Y < +\infty.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos

$$A_n := \left\{ x \in X : \quad \sup_{T\in F} \|Tx\|_Y \leq n \right\}.$$

Entonces $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Lema 1

Sea X un espacio de Banach y sea Y un espacio normado.
Sea F un subconjunto de $\mathcal{B}(X, Y)$ tal que

$$\forall x \in X \quad \sup_{T \in F} \|T(x)\|_Y < +\infty.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos

$$A_n := \left\{ x \in X : \quad \sup_{T \in F} \|Tx\|_Y \leq n \right\}.$$

Entonces $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Demostración.

Sea $x \in X$. Pongamos $n = \lceil \sup_{T \in F} \|T(x)\|_Y \rceil$ entonces $x \in A_n$

Lema 2

Considere A_n como en el lema anterior. Entonces A_n es cerrado.

Lema 2

Considere A_n como en el lema anterior. Entonces A_n es cerrado.

Demostración.

$$A_n := \left\{ x \in X : \quad \sup_{T \in F} \|Tx\|_Y \leq n \right\} = \{ x \in X : \quad \forall T \in F, \quad \|Tx\|_Y \leq n \}$$

$$= \bigcap_{T \in F} \{ x \in X : \ \|Tx\|_Y \leq n \} = \bigcap_{T \in F} T^{-1}[C_Y(0,n)].$$

Lema 2

Considere A_n como en el lema anterior. Entonces A_n es cerrado.

Demostración.

$$A_n := \left\{ x \in X : \quad \sup_{T \in F} \|Tx\|_Y \leq n \right\} = \{ x \in X : \quad \forall T \in F, \quad \|Tx\|_Y \leq n \}$$
$$= \bigcap_{T \in F} \{ x \in X : \ \|Tx\|_Y \leq n \} = \bigcap_{T \in F} T^{-1}[C_Y(0,n)].$$

Como T es continua y $C_Y(0,n)$ es cerrado, $T^{-1}[C_Y(0,n)]$ es cerrado.

Lema 2

Considere A_n como en el lema anterior. Entonces A_n es cerrado.

Demostración.

$$A_n := \left\{ x \in X : \quad \sup_{T \in F} \|Tx\|_Y \leq n \right\} = \{ x \in X : \quad \forall T \in F, \quad \|Tx\|_Y \leq n \}$$

$$= \bigcap_{T \in F} \{ x \in X : \ \|Tx\|_Y \leq n \} = \bigcap_{T \in F} T^{-1}[C_Y(0,n)].$$

Como T es continua y $C_Y(0,n)$ es cerrado, $T^{-1}[C_Y(0,n)]$ es cerrado.

Finalmente; como A_n es intersección de cerrados, A_n es cerrado.

Lema 3

Sean X, Y espacios normados, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{1}{r}\Big(\sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\|_Y\Big).$$

Lema 3

Sean X, Y espacios normados, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{1}{r}\Big(\sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\|_Y\Big).$$

Demostración.

Definamos $M := \sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\|_Y$.

Lema 3

Sean X, Y espacios normados, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{1}{r}\Big(\sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\|_Y\Big).$$

Demostración.

Definamos $M := \sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\|_Y$.

Sea $u \in C_X(0,1)$.

Lema 3

Sean X, Y espacios normados, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{1}{r}\Big(\sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\|_Y \Big).$$

Demostración.

Definamos $M := \sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\|_Y$.

Sea $u \in C_X(0, 1)$.

Entonces $a + ru, a - ru \in C_X(a, r)$, luego $2ru = 2ru + a - a = (a + ru) - (a - ru)$.

$$\|Tu\|_Y = \frac{1}{2r}\|T(2ru)\|_Y \leq \frac{1}{2r}\left(\|T(a + ru)\|_Y + \|T(a - ru)\|_Y\right) \leq \frac{M}{r}.$$

Lema 3

Sean X, Y espacios normados, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{1}{r}\left(\sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\|_Y \right).$$

Demostración.

Definamos $M := \sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\|_Y$.

Sea $u \in C_X(0, 1)$.

Entonces $a + ru, a - ru \in C_X(a, r)$, luego $2ru = 2ru + a - a = (a + ru) - (a - ru)$.

$$\|Tu\|_Y = \frac{1}{2r}\|T(2ru)\|_Y \leq \frac{1}{2r}\left(\|T(a + ru)\|_Y + \|T(a - ru)\|_Y\right) \leq \frac{M}{r}.$$

Pasando al supremo sobre u, obtenemos $\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{M}{r}$.

Plan

Principio de acotación uniforme.

Teorema

Sea X un espacio de Banach, sea Y un espacio normado.

Sea F subconjunto de $B(X,Y)$ tal que

$$\forall x \in X \quad \sup_{T\in F} ||T(x)||_Y < \infty.$$

Entonces

$$\sup_{T\in F} ||T||_{B(X,Y)} < \infty.$$

Demostración.

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos

$$A_n := \left\{ x \in X : \quad \sup_{T \in F} \|Tx\|_Y \leq n \right\} = \{ x \in X : \quad \forall T \in F \quad \|Tx\|_Y \leq n \} .$$

Por el lema 1, tenemos que $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Demostración.

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos

$$A_n := \left\{ x \in X : \quad \sup_{T \in F} \|Tx\|_Y \leq n \right\} = \{x \in X : \quad \forall T \in F \quad \|Tx\|_Y \leq n\}.$$

Por el lema 1, tenemos que $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Ahora, por el teorema de Baire, tenemos que

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{int}(\mathrm{clos}(A_k)) \neq \emptyset.$$

Demostración.

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos

$$A_n := \left\{ x \in X : \quad \sup_{T \in F} \|Tx\|_Y \leq n \right\} = \{ x \in X : \quad \forall T \in F \quad \|Tx\|_Y \leq n \} .$$

Por el lema 1, tenemos que $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Ahora, por el teorema de Baire, tenemos que

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(A_k)) \neq \emptyset.$$

Además, por el lema 2, A_n es cerrado. Entonces

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{int}(A_k) \neq \emptyset.$$

Es decir, existe a en X y $r > 0$, tales que $C_X(a, r) \subseteq A_k$.

Hemos mostrado que existe un a en X y un $r > 0$, tales que $C_X(a, r) \subseteq A_k$.

Hemos mostrado que existe un a en X y un $r > 0$, tales que $C_X(a, r) \subseteq A_k$.

Sea $T \in F$. Vamos a acotar la norma de T.

$$\forall x \in C_X(a, r) \quad \forall T \in F \quad \|T(x)\| \leq k.$$

Hemos mostrado que existe un a en X y un $r > 0$, tales que $C_X(a,r) \subseteq A_k$.

Sea $T \in F$. Vamos a acotar la norma de T.

$$\forall x \in C_X(a,r) \quad \forall T \in F \quad \|T(x)\| \leq k.$$

$$\forall T \in F \quad \forall x \in C_X(a,r) \quad \|T(x)\| \leq k.$$

Hemos mostrado que existe un a en X y un $r > 0$, tales que $C_X(a,r) \subseteq A_k$.

Sea $T \in F$. Vamos a acotar la norma de T.

$$\forall x \in C_X(a,r) \quad \forall T \in F \quad \|T(x)\| \leq k.$$

$$\forall T \in F \quad \forall x \in C_X(a,r) \quad \|T(x)\| \leq k.$$

$$\forall T \in F \qquad \sup_{x \in C_X(a,r)} \|T(x)\| \leq k.$$

Hemos mostrado que existe un a en X y un $r > 0$, tales que $C_X(a,r) \subseteq A_k$.
Sea $T \in F$. Vamos a acotar la norma de T.

$$\forall x \in C_X(a,r) \quad \forall T \in F \quad \|T(x)\| \leq k.$$

$$\forall T \in F \quad \forall x \in C_X(a,r) \quad \|T(x)\| \leq k.$$

$$\forall T \in F \qquad \sup_{x \in C_X(a,r)} \|T(x)\| \leq k.$$

Por el lema 3

$$\forall T \in F \quad \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{k}{r}.$$

$$\sup_{T \in F} \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{k}{r} < \infty.$$

Plan

Corolario (sobre las sucesiones puntualmente convergentes de operadores lineales acotados)

Sean X un espacio de Banach y Y un espacio normado.

Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X,Y)$.

Supongamos que

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} T_n(x) = S(x).$$

Entonces $S \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Corolario (sobre las sucesiones puntualmente convergentes de operadores lineales acotados)

Sean X un espacio de Banach y Y un espacio normado.
Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X,Y)$.
Supongamos que

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} T_n(x) = S(x).$$

Entonces $S \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Idea de demostración. De la definición de S se sigue que es lineal.
Como $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces es acotada. Luego, aplicando el principio de acotación uniforme a la sucesión T_n, se tiene que S es acotada.

Proposición (El encaje del espacio normado en su espacio bidual)

Sea X un espacio normado. Sea x en X.

Definimos $\Lambda_x : X^* \to \mathbb{C}$ como

$$\Lambda_x(\Phi) = \Phi(x).$$

Entonces $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| = \|x\|$.

Proposición (El encaje del espacio normado en su espacio bidual)

Sea X un espacio normado. Sea x en X.

Definimos $\Lambda_x : X^* \to \mathbb{C}$ como

$$\Lambda_x(\Phi) = \Phi(x).$$

Entonces $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| = \|x\|$.

Demostración. Sea $\Psi \in X^*$. Entonces

$\|\Lambda_x(\Psi)\| \leq \|\Psi\|\|x\|$.

Luego $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| \leq \|x\|$.

Proposición (El encaje del espacio normado en su espacio bidual)

Sea X un espacio normado. Sea x en X.

Definimos $\Lambda_x : X^* \to \mathbb{C}$ como

$$\Lambda_x(\Phi) = \Phi(x).$$

Entonces $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| = \|x\|$.

Demostración. Sea $\Psi \in X^*$. Entonces

$\|\Lambda_x(\Psi)\| \leq \|\Psi\|\|x\|$.

Luego $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| \leq \|x\|$.

Ahora gracias al corolario del teorema de Hahn-Banach

$\exists \eta \in X^*$ tal que $\eta(x) = \|x\| \quad \|\eta\| \leq 1$.

Proposición (El encaje del espacio normado en su espacio bidual)

Sea X un espacio normado. Sea x en X.

Definimos $\Lambda_x : X^* \to \mathbb{C}$ como

$$\Lambda_x(\Phi) = \Phi(x).$$

Entonces $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| = \|x\|$.

Demostración. Sea $\Psi \in X^*$. Entonces

$\|\Lambda_x(\Psi)\| \leq \|\Psi\|\|x\|$.

Luego $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| \leq \|x\|$.

Ahora gracias al corolario del teorema de Hahn-Banach

$\exists \eta \in X^*$ tal que $\eta(x) = \|x\| \quad \|\eta\| \leq 1$.

Luego, por la definición de Λ_x

$\|\Lambda_x\| \geq \|\eta(x)\| = \|x\|$.

Corolario (los conjuntos débilmente acotados en un espacio normado son acotados)

Sea X un espacio normado.

Sea $A \subset X$ tal que $\forall \phi \in X^*$, $\{\phi(x) \colon x \in A\}$ es acotado.

Entonces A es acotado.

Demostración.

Denotemos por Λ_x al funcional de evaluación en x

$$\Lambda_x \colon X^* \to \mathbb{C}, \qquad \Lambda_x(\phi) := \phi(x).$$

Corolario (los conjuntos débilmente acotados en un espacio normado son acotados)

Sea X un espacio normado.

Sea $A \subset X$ tal que $\forall \phi \in X^*$, $\{\phi(x)\colon\ x \in A\}$ es acotado.

Entonces A es acotado.

Demostración.

Denotemos por Λ_x al funcional de evaluación en x

$$\Lambda_x\colon X^* \to \mathbb{C}, \qquad \Lambda_x(\phi) \coloneqq \phi(x).$$

Por la proposición anterior $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| = \|x\|$.

Corolario (los conjuntos débilmente acotados en un espacio normado son acotados)

Sea X un espacio normado.

Sea $A \subset X$ tal que $\forall \phi \in X^*$, $\{\phi(x)\colon\ x \in A\}$ es acotado.

Entonces A es acotado.

Demostración.

Denotemos por Λ_x al funcional de evaluación en x

$$\Lambda_x\colon X^* \to \mathbb{C}, \qquad \Lambda_x(\phi) := \phi(x).$$

Por la proposición anterior $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| = \|x\|$.

Por otro lado $\{\Lambda_x\colon\ x \in A\} \subset \mathcal{B}(X^*, \mathbb{C})$.

Corolario (los conjuntos débilmente acotados en un espacio normado son acotados)

Sea X un espacio normado.

Sea $A \subset X$ tal que $\forall \phi \in X^*$, $\{\phi(x) \colon \ x \in A\}$ es acotado.

Entonces A es acotado.

Demostración.

Denotemos por Λ_x al funcional de evaluación en x

$$\Lambda_x \colon X^* \to \mathbb{C}, \qquad \Lambda_x(\phi) \coloneqq \phi(x).$$

Por la proposición anterior $\Lambda_x \in X^{**}$ y $\|\Lambda_x\| = \|x\|$.

Por otro lado $\{\Lambda_x \colon \ x \in A\} \subset \mathcal{B}(X^*, \mathbb{C})$.

Además por hipotesis $\{\Lambda_x \colon \ x \in A\}$ es puntualmente acotado.

Finalmente, como X^* es completo, por el principio de acotación uniforme

$$\sup_{x\in A} \|\Lambda_x\| < +\infty.$$

esto último equivale a

$$\sup_{x\in A} \|x\| < +\infty.$$