El grupo de Heisenberg
y el dominio de Siegel
Apuntes de servicio social

Estos apuntes los redactó el estudiante Alejandro Hernández Arteaga dentro de su trabajo de servicio social, con sugerencias del director del proyecto de investigación, Dr. Egor Maximenko.

Índice

1. Introduccón

Sea $n \in \mathbb{N}$. El *grupo de Heisenberg* se define como el siguiente conjunto de matrices $(n+2) \times (n+2)$:

$$\boldsymbol{H}_n := \left\{ M(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & a^\top & c \\ 0_n & I_n & b \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)} : \; a, b \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

En particular, para $n = 1$,

$$\boldsymbol{H}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

En general, se puede sustituir los números reales por cualquier anillo conmutativo con identidad, cuando se usan los números reales también se le suele llamar "el grupo de Heisenberg continuo" y cuando se usan los números enteros se le suele llamar "el grupo de Heisenberg discreto".

El grupo de Heisenberg que usa los números reales aparece en sistemas cuánticos de una dimensión, en particular, en el uso del teorema de Stone-von Neumann, el cual da una formulación a la unicidad de las relaciones de conmutatividad canónica entre los operadores de posición y momento.

Un grupo de Lie, es un grupo el cual también puede ser estudiado como una variedad diferenciable. Una variedad es un espacio el cual de manera local puede ser visto como un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, esto nos da una forma de ver un grupo diferente a la forma abstracta donde se define una operación donde todos los elementos tienen un elemento inverso y existe una identidad bajo dicha operación. Tomando estas dos ideas, uno puede tener la idea de un grupo continuo, donde los puntos pueden ser multiplicados entre ellos y se puede dar un inverso y se puede dar un origen de este espacio (la identidad del grupo). Si además consideramos que la operación entre elementos del grupo y la función que invierte los elementos del grupo son diferenciables, entonces tenemos el concepto de grupo de Lie.

Los grupos de Lie fueron estudiados en un principio como subgrupos del grupo de matrices invertibles de tamaño $n \times n$, los cuales ahora son llamados los grupos clásicos ya que se ha logrado extender el concepto de grupo de Lie más allá de este primer acercamiento. Estos grupos son llamados así por el matemático noruego Sophus Lie $(1842 - 1899)$, el cual formulo las bases para la teoría de transformaciones continuas de grupos. La motivación original de Lie para introducir los grupos de Lie fue el modelo de simetrías continuas de las ecuaciones diferenciables, lo cual puede ser comparado con el uso de grupos finitos en la teoría de Galois para modelar las simetrías discretas de ecuaciones algebraicas.

Por otro lado, consideremos el siguiente conjunto en $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$D_n := \{z = (z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \ \operatorname{Im}(z_{n+1}) > |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\}.$$

Este dominio se conoce como el *dominio de Siegel* (canónico) o el *semiespacio superior de Siegel*.

El ejemplo mas sencillo de D_n es cuando $n = 1$ y resulta ser el semiplano superior de $\mathbb{C}$. El concepto general de un dominio de Siegel surge en conexión con la teoría de funciones automorfas de varias variables complejas. Por tanto, este concepto se volvió central en la teoría de dominios acotados homogéneos.

Resulta que el grupo de Heisenberg $\boldsymbol{H}_n$ se puede identificar con la frontera del dominio D_n y con cierto subgrupo de biholomorfismos del dominio D_n sobre si mismo.

El grupo de Heisenberg, el dominio de Siegel y relaciones entre ellos hacen papeles importantes en la mecánica cuántica, en el análisis complejo en varias variables, en la teoría de grupos y álgebras de Lie, en la teoría de representaciones y en la teoría de operadores [1–8]. En el presente documento se explicarán algunas propiedades básicas de los objetos antes mencionados, primero se hará usando el caso especial con $n = 1$ y después el caso general.

2. El grupo de Heisenberg $\boldsymbol{H}_n$

Esta sección tendrá como objetivo probar que en efecto el grupo de Heisenberg es un grupo con el producto de matrices usual, el cual no es conmutativo. Además de obtener grupos isomorfos al mismo con los cuales será más natural trabajar las acciones del grupo $\boldsymbol{H}_n$ sobre el conjunto de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.1. Caso $n = 1$

Comenzaremos probando la siguiente proposición:

Proposición 1. *El conjunto*

$$H_1 := \left\{ M(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

es un subgrupo de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Demostración. Es claro que I_3 pertenece a este conjunto, basta tomar $a = b = c = 0$. con esto además se probó que $\boldsymbol{H}_1$ es distinto del vacío.

Sean ahora $A, B \in \boldsymbol{H}_1$, probemos que A es invertible y que $AB, A^{-1} \in \boldsymbol{H}_1$.

A es invertible puesto que $\det(A) = 1 \neq 0$.

Expresemos A y B de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Es claro que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & b_1 + a_1 & b_3 + a_1 b_2 + a_3 \\ 0 & 1 & a_2 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la matriz AB pertenece a $\boldsymbol{H}_1$.
Ahora tomando a A como se expresó antes, se tiene que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & a_1 a_2 - a_3 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

lo cual también se encuentra en $\boldsymbol{H}_1$. Por lo tanto, $\boldsymbol{H_1}$ es un grupo. □

A $\boldsymbol{H}_1$ se le llama el grupo de Heisenberg en $\mathbb{R}^{3\times 3}$, algunos autores lo designan también por $\boldsymbol{H}$.

El grupo $\boldsymbol{H}_1$ no es conmutativo. Tomamos, por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & d \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se verifica que $AB \neq BA$, ya que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & d + c \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & c + d + 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definición 2. Dado un grupo G, denotamos por $\operatorname{cent}(G)$ a su centro, es decir, al conjunto de los elementos que conmutan con todos los elementos del grupo:

$$\operatorname{cent}(G) := \{g \in G\colon \quad \forall h \in G \quad gh = hg\}.$$

Proposición 3.

$$\operatorname{cent}(\boldsymbol{H}_1) = \left\{ A \in \boldsymbol{H}_1 \quad : \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

Demostración. Denotemos por

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \boldsymbol{H}_1 \quad : \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si $A \in \mathcal{A}$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tomemos también $B \in \boldsymbol{H}_1$ como en (2). Después de hacer el producto el lector se puede dar cuenta que se cumple que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_3 + c \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

Por tanto $\mathcal{A} \subseteq \text{cent}(\boldsymbol{H}_1)$.

Sea ahora $A \in \text{cent}(\boldsymbol{H}_1)$. Expresemos A como en (2). Como $A \in \text{cent}(\boldsymbol{H}_1)$, entonces $AB = BA$ para toda $B \in \boldsymbol{H}_1$.

Sea entonces $B \in \boldsymbol{H}_1$ tomando a B como en (2) se tiene que $AB = BA$, en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 + b_1 & a_3 + b_3 + a_1 b_2 \\ 0 & 1 & a_2 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 + a_1 & b_3 + a_3 + b_1 a_2 \\ 0 & 1 & b_2 + a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lo cual ocurre si y sólo si $a_2 b_1 = a_1 b_2$ para todo $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Tomando $b_1 = 0$ y $b_2 = 1$ tenemos que $a_1 = 0$, luego con $b_1 = 0$ se tiene que $a_2 = 0$.

$$\therefore \text{cent}(\boldsymbol{H_1}) = \mathcal{A}.$$

□

2.2. Isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{H}_1$

Definamos ahora la función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ de la siguiente manera

$$g((a, b, c)) = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es claro que g es inyectiva.

Lema 4. *Denotemos por $\mathfrak{h}_1$ a la imagen de g, entonces la función exponencial es una biyección entre $\mathfrak{h}_1$ y $\boldsymbol{H}_1$.*

Demostración. Primero veamos que $\exp(\mathfrak{h}_1) \subseteq \boldsymbol{H}_1$ Sea $A \in \mathfrak{h}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

para algunos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Luego

$$\exp(A) = \exp \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & c + \frac{1}{2}ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{H}_1.$$

La función exponencial es inyectiva, pues si $A \in \mathfrak{h}_1$, entonces:

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{Ker} g &\iff \exp(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} 1 & a & c + \frac{1}{2}ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\iff a = 0,\ b = 0 \text{ y } c + \frac{1}{2}ab = 0 \\ &\iff a = 0,\ b = 0 \text{ y } c = 0 \\ &\iff A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Ker}\, g = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Veamos que exp es suprayectiva, sea $B \in \boldsymbol{H}_1$.
Expresemos a B como en (2).
Entonces:

$$B = \exp \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_3 - \frac{1}{2}b_1 b_2 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Definamos la operación $\bullet\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como

$$(a,b,c) \bullet (u,v,w) = (a+u, b+v, c+w - \frac{1}{2}(bu - av)).$$

Proposición 5. $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ *es un grupo, donde su identidad es* $(0,0,0)$.

Demostración. Sean $(a,b,c), (u,v,w)$ y $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\begin{aligned}
&[(a,b,c) \bullet (u,v,w)] \bullet (x,y,z) \\
&\qquad = \left(a+u, b+v, c+w - \frac{1}{2}(bu-av)\right) \bullet (x,y,z) \\
&\qquad = \left([a+u]+x, [b+v]+y, [c+w+2(bu-av)] + z - \frac{1}{2}[(b+v)x - (a+u)y]\right) \\
&\qquad = \left(a + [u+x], b + [v+y], c + \left[w + z - \frac{1}{2}(vx-uy) - \frac{1}{2}\left[(u+x)b - (v+y)a\right]\right]\right) \\
&\qquad = (a,b,c) \bullet \left(u+x, v+y, w+z - \frac{1}{2}(vx-uv)\right) \\
&\qquad = (a,b,c) \bullet [(u,v,w) \bullet (x,y,z)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bullet$ es asociativa.
Sea $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$(a,b,c) \bullet (0,0,0) = (a+0, b+0, c+0 - \frac{1}{2}(a0 + b0)) = (a,b,c).$$

Por lo tanto $(0,0,0)$ es identidad de $(\mathbb{R}^3, \bullet)$. Además se tiene que:

$$(a,b,c) \bullet (-a,-b,-c) = \left(a + [-a], b + [-b], c + [-c] - \frac{1}{2}[-ab + ab]\right) = (0,0,0).$$

Así $(a,b,c)^{-1} = (-a,-b,-c) \in \mathbb{R}^3$.

□

Teorema 6. $(\mathbb{R}^3, \bullet) \cong \boldsymbol{H}_1$.

Demostración. Veamos que $\exp \circ g$ es un isomorfismo entre $(\mathbb{R}^3)$ y $\boldsymbol{H}_1$.
Por el lema 4 tenemos que la función exponencial es una función biyectiva de $\operatorname{Im} g$ a $\boldsymbol{H}_1$ y también sabemos que g es inyectiva, por lo tanto $\exp \circ g$ es una biyección, entonces solo bastará probar que es un homomorfismo.
Sean (a,b,c) y (x,y,z) $\in \mathbb{R}^3$, entonces se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(\exp\circ g)[(a,b,c)\bullet(x,y,z)] &= \exp(g((a,b,c)\bullet(x,y,z)))\\
&= \exp(g((a+x,b+y,c+z-\frac{1}{2}(bx-ay))))\\
&= \exp\begin{bmatrix} 0 & a+x & c+z-\frac{1}{2}(bx-ay)\\ 0 & 0 & b+y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & a+x & c+z-\frac{1}{2}(bx-ay)+\frac{1}{2}(a+x)(b+y)\\ 0 & 1 & b+y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & a+x & z+c+\frac{1}{2}(xy+ab)+ay\\ 0 & 1 & b+y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & a & c+\frac{1}{2}ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x & z+\frac{1}{2}xy\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= \exp\begin{bmatrix} 0 & a & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\exp\begin{bmatrix} 0 & x & z\\ 0 & 0 & y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
&= [\exp(g(a,b,c))]\exp(g(x,y,z))\\
&= (\exp\circ g)(a,b,c)(\exp\circ g)(x,y,z).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\exp\circ g$ es isomorfismo entre $(\mathbb{R}^3,\bullet)$ y $\boldsymbol{H}_1$. □

2.3. Comprobación de isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{H}_1$

A continuación se muestra un programa en sagemath el cual realiza comprobaciones de este isomorfismo.

```
#Funcion que mapea R^3 a h_1
def g(z):
    return Matrix(RDF,3,3,[[0,z[0],z[2]],[0,0,z[1]],[0,0,0]])

#Operacion de R^3
def R3(x,y):
    return vector(RDF,3,[x[0] + y[0],x[1] + y[1],\
                    x[2] + y[2] - 0.5 * (x[1] * y[0] - x[0] * y[1])])

#Funcion que prueba el isomorfismo
def ism(x,y):
```

```
    lhs = exp(g(R3(x,y)))
    rhs = exp(g(x)) * exp(g(y))
    return (lhs - rhs).norm()

#Funcion que prueba el isomorfismo
def test():
    u = random_vector(RDF,3)
    v = random_vector(RDF,3)
    print(ism(u,v))

test()
```

2.4. Isomorfismo entre $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{H}_1$

Ahora, sea $G = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Dotemos a este conjunto G con la operación $\dagger : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ definida como

$$((z,a),(w,b)) \mapsto (z+w, a+b-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{w}))$$

.

Demostraremos que $(G,\dagger)$ es un grupo y que además se cumple que $(G,\dagger) \cong \boldsymbol{H}_1$.

Proposición 7. $(G,\dagger)$ *es un grupo, en el cual su identidad es* $(0,0)$.

Demostración. Veamos que $\dagger$ es asociativa. Sean $(z,a),(u,b)$ y $(v,c) \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
[(z,a)\dagger(u,b)]\dagger(v,c) &= (z+u, a+b-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{u}))\dagger(v,c)\\
&= ((z+u)+v, a+b-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{u})+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}([z+u]\overline{v}))\\
&= ((z+u)+v, a+b-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{u})+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{v}+u\overline{v}))\\
&= ((z+u)+v, a+b+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{u})-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{v})-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(u\overline{v}))\\
&= (z+(u+v), a+(b+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(u\overline{v}))-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{u})-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{v}))\\
&= (z+(u+v), a+(b+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(u\overline{v}))-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z(\overline{u+v})))\\
&= (z,a)\dagger(u+v, b+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(u\overline{v}))\\
&= (z,a)\dagger[(u,b)\dagger(v,c)].
\end{aligned}$$

Sea ahora $(z,a) \in G$, entonces

$$(z,a) \dagger (0,0) = (z+0, a+0-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z\overline{0})) = (z, a+0) = (z,a).$$

Por lo tanto $(0,0)$ es identidad en G, por otra parte

$$(z,a) \dagger (-z,-a) = \left(z-z, a-a-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z(-\overline{z}))\right) = (0,0).$$

Entonces para $(z,a) \in G$ denotaremos por $(z,a)^{-1}$ al elemento $(-z,-a)$. $\square$

Teorema 8. $(G, \dagger) \cong \boldsymbol{H}_1$.

Demostración. Probemos que $(G, \dagger) \cong (\mathbb{R}^3, \bullet)$.
Definamos la funcion $\gamma : \mathbb{R}^3 \to G$ por la regla $(a,b,c) \mapsto (a+ib, c)$.
Por la definición de γ es claro que es inyectiva y suprayectiva, solo bastará probar que es un homomorfismo.
Sean (a,b,c) y (x,y,z) elementos de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned}
\gamma((a,b,c) \bullet (x,y,z)) &= \gamma((a+x, b+y, c+z-\frac{1}{2}(bx-ay))) \\
&= ([a+x]+[b+y]i, c+z-\frac{1}{2}(bx-ay)) \\
&= (a+bi, c) \dagger (x+yi, z) \\
&= \gamma((a,b,c)) \dagger \gamma((x,y,z)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\mathbb{R}^3, \bullet) \cong (G, \dagger)$, luego por el teorema 6 se tiene lo que se quería. $\square$

2.5. Comprobación de isomorfismo entre $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{H}_1$

A continuación se muestra un programa en sagemath el cual realiza comprobaciones de este isomorfismo.

```
#Operacion de R^3
def R3(u,v):
    ret = vector(RDF,3)
    ret[0:1] = u[0:1] + v[0:1]
    ret[2] = u[2] + v[2] - 0.5 * (u[1] * v[0] - u[0] * v[1])
    return ret

#Operacion de CxR
def CR(x,y):
    ret = vector(CDF,2)
```

```
    ret[0] = x[0] + y[0]
    p = (x[0] * y[0].conjugate()).imag()
    ret[1] = x[1] + y[1] - 0.5 * d
    return ret

#Mapeo entre CxR y R^3
def isrh(x):
    return vector(RDF,3,[x[0].real(),x[0].imag(),x[1]])

#Funcion que devuelve si funciona el isomorfismo entre R^3 y CxR
def ism(z,w):
    return (isrh(CR(z,w)) - R3(isrh(z),isrh(w))).norm()

#Funcion que prueba el isomorfismo entre CxR y R^3
def test():
    ent = random_vector(RDF,6)
    z = vector(CDF,2,[ent[0] + ent[1] * I, ent[2]])
   w = vector(CDF,2,[ent[3] + ent[4] * I,ent[5]])
    print(ism(z,w))

test()
```

3. Caso general ($n > 1$)

En esta sección a_n denotará al vector en $\mathbb{R}^n$ cuyas entradas sean solo el número a. Además de que $\langle\cdot\rangle$ denotará al producto interno usual de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathbb{C}^n$ dependiendo el caso.

Proposición 9. *El conjunto*

$$\boldsymbol{H}_n := \left\{ M(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & a^\top & c \\ 0_n & I_n & b \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)} \colon \; a,b \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad c \in \mathbb{R} \right\} \tag{4}$$

es un subgrupo de $\mathrm{GL}_{n+2}(\mathbb{R})$.

Demostración. Es claro que $I_{(n+2)}$ pertenece a este conjunto, basta tomar $a = b = 0_n$ y $c = 0$, con esto además se probó que $\boldsymbol{H}_n$ es distinto del vacío.
Sean ahora $A, B \in \boldsymbol{H}_n$, probemos que A es invertible y que $AB, A^{-1} \in \boldsymbol{H}_n$.

A es invertible puesto que $\det(A) = 1 \neq 0$.

Expresemos A y B de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1^\top & a_3 \\ 0_n & I_n & a_2 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & b_1^\top & b_3 \\ 0_n & I_n & b_2 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

haciendo el producto tenemos que:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & b_1^\top + a_1^\top & b_3 + \langle a_1, b_2 \rangle + a_3 \\ 0_n & I_n & a_2 + b_2 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz AB pertenece a $\boldsymbol{H}_n$.

Ahora tomando a A como se expresó antes, se tiene que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1^\top & \langle a_1, a_2 \rangle - a_3 \\ 0_n & I_n & -a_2 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix}.$$

Lo cual también se encuentra en $\boldsymbol{H}_n$. Por lo tanto $\boldsymbol{H}_n$ es un grupo. □

A $\boldsymbol{H}_n$ se le llama el grupo de Heisenberg en $\mathbb{R}^{(n+2 \times n+2)}$, algunos autores lo designan también por $\boldsymbol{H}$.

El grupo $\boldsymbol{H}_n$ no conmutativo. Basta con tomar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^\top & c \\ 0_n & I_n & 1_n \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1_n^\top & d \\ 0_n & I_n & 1_n \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposición 10.

$$\operatorname{cent}(\boldsymbol{H}_n) = \left\{ A \in \boldsymbol{H}_n \quad : A = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^\top & c \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \quad c \in \mathbb{R} \right\}$$

.

Demostración. Denotemos por

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \boldsymbol{H}_1 \quad : \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^\top & a \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si $A \in \mathcal{A}$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^\top & c \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix},$$

tomemos también $B \in \boldsymbol{H}_1$ como en (5). Después de hacer el producto el lector se puede dar cuenta que se cumple que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & b_1^\top & b_3 + c \\ 0_n & I_n & b_2 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

Por tanto $\mathcal{A} \subseteq \text{cent}(\boldsymbol{H}_1)$. Sea ahora $A \in \text{cent}(\boldsymbol{H}_n)$. Expresemos A como en 5. Como $A \in \text{cent}(\boldsymbol{H}_n)$, entonces $AB = BA$ para toda $B \in \boldsymbol{H}_n$.
Sea entonces $B \in \boldsymbol{H}_n$ expresada como en (5), luego $AB = BA$, en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1^\top + b_1^\top & a_3 + b_3 + \langle a_1, b_2 \rangle \\ 0_n & I_n & a_2 + b_2 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_1^\top + a_1^\top & b_3 + a_3 + \langle b_1, a_2 \rangle \\ 0_n & I_n & b_2 + a_2 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix}.$$

Lo cual ocurre si y sólo si $\langle b_1, a_2 \rangle = \langle a_1, b_2 \rangle$ para todo $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$, en particular tomando $b_2 = 0_n$ y haciendo variar a b_1 en todos los elementos de una base de $\mathbb{R}^n$ se tiene que $a_1 = 0_n$. Haciendo variar ahora a b_2 en una base de $\mathbb{R}^n$ se tiene que $a_2 = 0_n$, así tenemos que $a_1 = a_2 = 0_n$.

$$\therefore \text{cent}(\boldsymbol{H}_n) = \mathcal{A}.$$

□

3.1. Isomorfismo entre $\mathbb{R}^{(2n+1)}$ y $\boldsymbol{H}_n$

Definamos ahora la función $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ como

$$h((a, b, c)) = \begin{bmatrix} 0 & a^\top & c \\ 0_n & 0_{n\times n} & b \\ 0 & 0_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Es claro que h es inyectiva.

Lema 11. *Denotemos por $\mathfrak{h}_n$ a la imagen de h, entonces la función exponencial es una biyección entre $\mathfrak{h}_n$ y $\boldsymbol{H}_n$.*

Demostración. Primero veamos que $\exp(\mathfrak{h}_n) \subseteq \boldsymbol{H}_n$ Sea $A \in \mathfrak{h}_n$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a^\top & c \\ 0_n & 0_{n\times n} & b \\ 0 & 0_n^\top & 0 \end{bmatrix},$$

para algunos $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Luego

$$\exp(A) = \exp \begin{bmatrix} 0 & a^\top & c \\ 0_n & 0_{n\times n} & b \\ 0 & 0_n^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a^\top & c + \frac{1}{2}\langle a, b \rangle \\ 0_n & I_n & b \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{H}_n.$$

La función exponencial es inyectiva, pues si $A \in \mathfrak{h}_n$, entonces

$$
\begin{aligned}
A \in \operatorname{Ker} h &\iff \exp(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^\top & 0 \\ 0_n & I_n & 0 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \\
&\iff \begin{bmatrix} 1 & a^\top & c + \frac{1}{2}\langle a, b\rangle \\ 0_n & I_n & b \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^\top & 0 \\ 0_n & I_n & 0 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \\
&\iff a = 0,\ b = 0 \text{ y } c + \frac{1}{2}\langle a, b\rangle = 0 \\
&\iff a = 0,\ b = 0 \text{ y } c = 0 \\
&\iff A = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^\top & 0 \\ 0_n & I_n & 0 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\operatorname{Ker} h = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0_n^\top & 0 \\ 0_n & I_n & 0 \\ 0 & 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \right\}.
$$

Veamos que exp es suprayectiva, sea $B \in \boldsymbol{H}_n$.
Expresemos a B como en (5).

Entonces

$$
B = \exp \begin{bmatrix} 0 & b_1^\top & b_3 - \frac{1}{2}\langle b_1, b_2\rangle \\ 0_n & 0_{n\times n} & b_2 \\ 0 & 0_n^\top & 0 \end{bmatrix}.
$$

□

Definamos la operación $\bullet\colon \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$, por:

$$
(a, b, c) \bullet (u, v, w) = (a + u, b + v, c + w - \frac{1}{2}(\langle b, u\rangle - \langle a, v\rangle)).
$$

Proposición 12. $(\mathbb{R}^{(n+2)}, \bullet)$ *es un grupo, donde su identidad es* $(0_n, 0_n, 0)$.

Demostración. Sean $(a, b, c), (u, v, w)$ y $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{(n+2)}$

$$\begin{aligned}
&[(a,b,c) \bullet (u,v,w)] \bullet (x,y,z) \\
&\qquad = \left(a+u, b+v, c+w - \frac{1}{2}(\langle b,u\rangle - \langle a,v\rangle)\right) \bullet (x,y,z) \\
&\qquad = \left([a+u]+x, [b+v]+y, [c+w+2(\langle b,u\rangle - \langle a,v\rangle)] + z - \frac{1}{2}[\langle b+v,x\rangle - \langle a+u,y\rangle]\right) \\
&\qquad = \left(a+[u+x], b+[v+y], c+\left[w+z-\frac{1}{2}(\langle v,x\rangle - \langle u,y\rangle) - \frac{1}{2}[\langle u+x,b\rangle - \langle v+y,a\rangle]\right]\right) \\
&\qquad = (a,b,c) \bullet \left(u+x, v+y, w+z - \frac{1}{2}(\langle v,x\rangle - \langle u,v\rangle)\right) \\
&\qquad = (a,b,c) \bullet [(u,v,w) \bullet (x,y,z)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bullet$ es asociativa.
Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, entonces

$$(a,b,c) \bullet (0_n, 0_n, 0) = (a+0_n, b+0_n, c+0-\frac{1}{2}(\langle a,0\rangle + \langle b,0\rangle)) = (a,b,c).$$

Por lo tanto $(0_n, 0_n, 0_n)$ es identidad de $(\mathbb{R}^{2n+1}, \bullet)$. Además se tiene que:

$$(a,b,c) \bullet (-a,-b,-c) = \left(a+[-a], b+[-b], c+[-c] - \frac{1}{2}[\langle -a,b\rangle + \langle a,b\rangle]\right) = (0_n, 0_n, 0).$$

Así $(a, b, c)^{-1} = (-a, -b, -c)$ para todo elemento $(a, b, c) \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

$\square$

Teorema 13. $(\mathbb{R}^{2n+1}, \bullet) \cong \boldsymbol{H}_n$

Demostración. Veamos que $\exp \circ g$ es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^{2n+1}$ y $\boldsymbol{H}_n$.
Por el lema 11 tenemos que la función exponencial es una función biyectiva de $\operatorname{Im} h$ a $\boldsymbol{H}_n$ y también sabemos que h es inyectiva, por lo tanto $\exp \circ h$ es una biyección, entonces solo bastará probar que es un homomorfismo.
Sean (a, b, c) y (x, y, z) $\in \mathbb{R}^{2n+1}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
(\exp\circ h)[(a,b,c)\bullet(x,y,z)] &= \exp(h((a,b,c)\bullet(x,y,z)))\\
&= \exp(h((a+x,b+y,c+z-\frac{1}{2}(\langle b,x\rangle-\langle a,y\rangle))))\\
&= \exp\begin{bmatrix} 0 & a^\top+x^\top & c+z-\frac{1}{2}(\langle b,x\rangle-\langle a,y\rangle)\\ 0_n & 0_{n\times n} & b+y\\ 0 & 0_n^\top & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & a^\top+x^\top & c+z-\frac{1}{2}(\langle b,x\rangle-\langle a,y\rangle)+\frac{1}{2}\langle a+x,b+y\rangle\\ 0_n & I_n & b+y\\ 0 & 0_n^\top & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & a^\top+x^\top & z+c+\frac{1}{2}(\langle x,y\rangle+\langle a,b\rangle)+\langle a,y\rangle\\ 0_n & I_n & b+y\\ 0 & 0_n^\top & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & a^\top & c+\frac{1}{2}\langle a,b\rangle\\ 0_n & I_n & b\\ 0 & 0_n^\top & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x^\top & z+\frac{1}{2}\langle x,y\rangle\\ 0_n & I_n & y\\ 0 & 0_n^\top & 1\end{bmatrix}\\
&= \exp\begin{bmatrix} 0 & a^\top & c\\ 0_n & 0_{n\times n} & b\\ 0 & 0_n^\top & 0\end{bmatrix}\exp\begin{bmatrix} 0 & x^\top & z\\ 0_n & 0_{n\times n} & y\\ 0 & 0_n^\top & 0\end{bmatrix}\\
&= (\exp(h(a,b,c))\exp(h(x,y,z))\\
&= (\exp\circ h)(a,b,c)*(\exp\circ h)(x,y,z).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\exp\circ h$ es isomorfismo entre $(\mathbb{R}^{2n+1},\bullet)$ y $\boldsymbol{H}_n$. $\square$

3.2. Comprobación númerica del isomorfismo entre $\mathbb{R}^{(2n+1)}$ y $\boldsymbol{H}_n$

A continuacion se pone un programa en sagemath el cual comprueba el isomorfismo descrito en 13.

```
#Funcion que mapea R^(2n+1) a h_n
def h(z):
    n = len(z) // 2
    A = matrix(RDF,n + 2,n + 2)
    A[0,n + 1] = z[2 * n]
    A[0,1:n + 1] = z [0:n]
    A[1:n + 1,n + 1] = z[n:2 * n]
    return A

#Operacion en R^(2n+1)
def R2n1(x,y):
```

```
    n = len(x) // 2
    ax = vector(RDF, n, x[0:n])
    ay = vector(RDF, n, y[0:n])
    bx = vector(RDF, n, x[n:2 * n])
    by = vector(RDF, n, y[n:2 * n])
    ret = vector(RDF, 2*n+1)

    ret[0:2 * n] = x[0:2 * n] + y[0:2 * n]
    d = bx.dot_product(ay) - ax.dot_product(by)

    ret[2 * n] = x[2 * n] + y[2 * n] - 0.5 * d

    return ret

#Funcion que estima la distancia de las operaciones
def ism(u,v):
    lhs = exp(isrh(R2n1(u,v)))
    rhs = exp(isrh(u)) * exp(isrh(v))
    return (lhs-rhs).norm()

#Dos elementos arbitrarios en R^(2n+1)
def test(n):
    x = random_vector(RDF,2 * n + 1)
    y = random_vector(RDF,2 * n + 1)
    print(ism(x,y))
```

3.3. Isomorfismo entre $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{H}_n$

Ahora, sea $G = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$. Dotemos a este conjunto G con la operación $\dagger : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}) \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ definida por la relación:

$$((z,a),(w,b)) \mapsto (z+w, a+b-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,\bar{w}\rangle).$$

Demostremos que $(G,\dagger)$ es un grupo y que además se cumple que $(G,\dagger) \cong \boldsymbol{H}_n$.

Proposición 14. $(G,\dagger)$ *es un grupo, en el cual su identidad es* $(0_n, 0)$.

Demostración. Veamos que $\dagger$ es asociativa. Sean $(z,a),(u,b)$ y $(v,c) \in G$, entonces:

$$
\begin{aligned}
[(z,a) \dagger (u,b)] \dagger (v,c) &= (z+u, a+b-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,\bar{u}\rangle) \dagger (v,c) \\
&= ((z+u)+v, a+b-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,\bar{u}\rangle + c - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z+u,\bar{v}\rangle) \\
&= ((z+u)+v, a+b-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,\bar{u}\rangle + c - \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\langle z,\bar{v}\rangle + \langle u,\bar{v}\rangle)) \\
&= ((z+u)+v, a+b+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,\bar{u}\rangle - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z\bar{v}\rangle - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle u,\bar{v}\rangle) \\
&= (z+(u+v), a+(b+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle u,\bar{v}\rangle) - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,\bar{u}\rangle - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,\bar{v}\rangle) \\
&= (z+(u+v), a+(b+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle u,\bar{v}\rangle) - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,\overline{u+v}\rangle) \\
&= (z,a) \dagger (u+v, b+c-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle u,\bar{v}\rangle) \\
&= (z,a) \dagger [(u,b) \dagger (v,c)].
\end{aligned}
$$

Sea ahora $(z,a) \in G$, entonces:

$$(z,a) \dagger (0_n, 0) = (z+0_n, a+0-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,\bar{0}\rangle) = (z, a+0) = (z,a).$$

Por lo tanto $(0_n, 0)$ es identidad en G, por otra parte

$$(z,a) \dagger (-z,-a) = (z-z, a-a-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z,-\bar{z}\rangle) = (0_n, 0).$$

Entonces para $(z,a) \in G$ denotaremos por $(z,a)^{-1}$ al elemento $(-z,-a)$. □

Teorema 15. $(G,\dagger) \cong \boldsymbol{H}_n$.

Demostración. Probemos que $(G,\dagger) \cong (\mathbb{R}^{2n+1}, \bullet)$.

Definamos la funcion $\eta : \mathbb{R}^{2n+1} \to G$ por la regla $(a,b,c) \mapsto (a+ib, c)$.

Por la definición de η es claro que es inyectiva y suprayectiva, solo bastará probar que es un homomorfismo.

Sean (a,b,c) y (x,y,z) $\in \mathbb{R}^{2n+1}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\eta((a,b,c) \bullet (x,y,z)) &= \eta\left((a+x, b+y, c+z-\frac{1}{2}(\langle b,x\rangle - \langle a,y\rangle))\right) \\
&= \left([a+x]+[b+y]i, c+z-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle a+ib, x-iy\rangle\right) \\
&= (a+ib, c) \dagger (x+iy, z) \\
&= \eta((a,b,c)) \dagger \eta((x,y,z)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(\mathbb{R}^{2n+1}, \bullet) \cong (G,\dagger)$, luego por el teorema 13 se tiene lo que se quería. □

3.4. Comprobación númerica del isomorfismo entre $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{H}_n$

A continuación se deja un programa el sagemath que realiza comprobaciones numericas del isomorfismo probado anteriormente.

```
#Operacion en R^(2n+1)
def R2n1(x,y):
    n = len(x) // 2
    ax = vector(RDF, n, x[0:n])
    ay = vector(RDF, n, y[0:n])
    bx = vector(RDF, n, x[n:2 * n])
    by = vector(RDF, n, y[n:2 * n])
    ret = vector(RDF, 2 * n + 1)

    ret[0:2 * n] = x[0:2 * n] + y[0:2 * n]
    d = bx.dot_product( ay ) - ax.dot_product( by )

    ret[2 * n] = x[2 * n] + y[2 * n] - 0.5 * d

    return ret

#Operacion en (C^n)xR
def CnR(z,w):
    n = len(z) - 1
    cz = vector(CDF,n,z[0:n])
    cw = vector(CDF,n,w[0:n])

    ret = vector(CDF,n+1)
    ret[0:n] = z[0:n] + w[0:n]
    d = cz.dot_product(cw.conjugate())
    ret[n] = z[n] + w[n] - 0.5 * d

    return ret

#Funcion que mapea R^2n+1 a (C^n)xR
def isrh(x):
    n = len(x) // 2
    ret = vector(CDF,n+1)
    ret[0:n] = x[0:n] + x[n:2*n] * I
    ret[n] = x[2*n]
    return ret
```

```
#Funcion que estima la distancia entre los elementos
def ism(u,v):
    lhs = CnR(isrh(u),isrh(v))
    rhs = isrh(R2n1(u,v))

    return (lhs - rhs).norm()

def test(n):
    z = random_vector(RDF,2 * n + 1)
    w = random_vector(RDF, 2 * n + 1)

    print(ism(z,w))
```

4. La representación canónica del grupo de Heisenberg en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Definición 16. Sea V un espacio vectorial, G un grupo de Lie y denotemos por $\mathbf{GL}\ (V)$ al grupo de transformaciones lineales invertibles de V. Entonces una representación de G es un homomorfismo de grupos de Lie

$$\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V).$$

Lo cual, en otras palabras, podría pensarse como una acción lineal (dado que para todo $g \in G$ se tiene un operador asociado $\Pi(g)$, el cual actua sobre V).

Definición 17. Sea V un espacio vectorial con producto interno y G ungrupo de Lie, una representacion $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es unitaria si $\Pi(A)$ es un operador unitario en V para todo $A \in G$.

Ahora daremos una acción de $\boldsymbol{H}_n$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ la cual veremos que es una representación unitaria.

Teorema 18. *Sea $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$, la función U_h definida como sigue es una representación unitaria del grupo $\boldsymbol{H}_n$ en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$:*

$$(U_h(M(a,b,c))\psi)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\langle b,x\rangle + hc)}\, \psi(x + ha).$$

Demostración. Sea $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a, b, u, v \in \mathbb{R}^n$, $w, c \in \mathbb{R}$ y $\psi, \phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Veamos que es una acción, recordemos que la identidad en $\boldsymbol{H}_n$ es $M(0,0,0)$, entonces se tiene que

$$(U_h(M(0,0,0))\psi)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\langle 0,x\rangle + h0)}\, \psi(x + h0) = \psi(x).$$

Además tenemos que

$$(U_h(M(a,b,c)M(u,v,w))\psi)(x) = (U_h(M(a+u,b+v,c+w+\langle a,v\rangle))\psi)(x) =$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\langle b+v,x\rangle + h(c+w+\langle a,v\rangle))}\,\psi(x+h(a+u)) = e^{\mathrm{i}(\langle v,x+ha\rangle)}e^{\mathrm{i}(hw)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\langle b,hu\rangle+hc)}\,\psi((x+hu)+ha) =$$
$$U_h(M(a,b,c))e^{\mathrm{i}(\langle v,x\rangle+hw)}\psi(x) = (U_h(M(a,b,c))(U_h(M(u,v,w)))\psi)(x).$$

Por lo tanto U_h es una representación de $\boldsymbol{H}_n$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Veamos que sea una representación unitaria, para esto probaremos que el operador $U_h(M(a,b,c))$ es isométrico y suprayectivo sin importar la elección de h, a, b o c. Es isométrico pues

$$\begin{aligned}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|(U_h(M(a,b,c)\psi))(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\rangle b,x\rangle+hw)\psi(x+ha)dx}|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\psi(x+ha)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\psi(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

5. El dominio de Siegel $\boldsymbol{D}$

5.1. Definición del dominio de Siegel y su relación con $\mathbb{B}_n$

Definición 19. Sea $n > 1$.
Denotaremos por $\boldsymbol{D}_n$ al dominio de Siegel en $\mathbb{C}^n$ Por el siguiente conjunto:

$$\boldsymbol{D}_n = \left\{(w_1, w_2, w_3, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n\colon\ \operatorname{Im} w_n > \sum_{j=1}^{n-1}|w_j|^2\right\}.$$

Nos referiremos a la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$ por $\mathbb{B}_n$. Definamos la función $\Phi\colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{C}^n$, dada por:

$$\Phi(z) = \left(\frac{z_1}{1+z_n}, \frac{z_2}{1+z_n}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{1+z_n}, i\frac{1-z_n}{1+z_n}\right).$$

Lema 20. *Φ es un biholomorfismo de $\mathbb{B}_n$ a $\boldsymbol{D}_n$.*

Demostración. Primeramente veamos que $\Phi\colon \mathbb{B}_n \to \boldsymbol{D}_n$.
Sea $z \in \mathbb{B}_n$, con $z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ entonces:

$$\Phi(z) = \left(\frac{z_1}{1+z_n}, \frac{z_2}{1+z_n}, \dots, i\frac{1-z_n}{1+z_n}\right) = w.$$

Además se cumple que

$$\sum_{j=1}^{n-1}|w_j|^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{z_j}{1+z_n}\right|^2 = \frac{1}{|1+z_n|^2}\sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^2 < \frac{1-|z_n|^2}{|1+z_n|^2} = \operatorname{Im} w_n.$$

Definamos la función $\Phi^{-1}\colon \boldsymbol{D}_n \to \mathbb{B}_n$ como:

$$\Phi^{-1} = \left(2i\frac{w_1}{i+w_n}, 2i\frac{w_1}{i+w_n}, \dots, \frac{i-w_n}{i+w_n}\right).$$

Probemos que en efecto, $\Phi(\boldsymbol{D}_n) \subseteq \mathbb{B}_n$. Sea $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \boldsymbol{D}_n$, entonces:

$$|\Phi^{-1}(w)|^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{4|w_j|^2}{1+2\operatorname{Im} w_n + |w_n|^2} + \frac{1-2\operatorname{Im} w_n + |w_n|^2}{1+2\operatorname{Im} w_n + |w_n|^2}$$
$$\leqslant \frac{4\operatorname{Im} w_n}{1+2\operatorname{Im} w_n + |w_n|^2} + \frac{1-2\operatorname{Im} w_n + |w_n|^2}{1+2\operatorname{Im} w_n + |w_n|^2} = \frac{1+2\operatorname{Im} w_n + |w_n|^2}{1+2\operatorname{Im} w_n + |w_n|^2} = 1.$$

Se verifica que $\Phi \circ \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$, por lo tanto Φ es una biyección, además de que es holomorfa ya que cada una de sus funciones componente es holomorfa.

$\square$

Ahora pondremos un programa que dado un punto en $\mathbb{B}_n$ nos devuelve su imagen en $\boldsymbol{D}_n$

```
#Creacion de vector aleatorio en B^n
def random_vector_unitball(n):
    z = random_vector(CDF, n)
    ret = z / norm(z)
    ret = RDF.random_element(0, 1) * ret
    return ret

#Definimos la funcion phi en C^n
def Phi(z):
    n = len(z)
    s = vector(CDF, n)
    s[0 : n-1] = z[0 : n-1] / (1 + z[n-1])
    s[n-1] = I * (1 - z[n-1]) / (1 + z[n-1])
```

```
    return s

#Funcion que comprueba si un vector esta en Siegel
def is_Siegel(z):
    n = len(z)
    p = vector(CDF, n-1)
    p[0:n-1] = z[0:n-1]
    return z[n-1].imag() > (p.norm(2)) ^ 2

#Comprobacion de pertenencia a dominio de Siegel
def test_Phi(n):
    w = random_vector_unitball(n)
    t = is_Siegel(Phi(w))
    print(t)
```

5.2. Núcleo reproductor de $\mathcal{A}_\alpha^p$

Denotaremos a $d\nu$ a la medida normalizada de $\mathbb{B}_n$, a $d\sigma$ por la medida normalizada de $\boldsymbol{S}_n$ y a dV por la medida usual de Lebesgue en $\mathbb{C}^n$, sin normalizar. Primero mostraremos lo siguiente.

Teorema 21. *Las medidas ν y σ están relacionadas por la siguiente expresión:*

$$\int\limits_{\mathbb{B}_n} f(z)d\nu(z) = 2n\int\limits_0^1 r^{2n-1}dr\int\limits_{\boldsymbol{S}_n} f(r\zeta)d\sigma(\zeta).$$

Demostración. Escribamos a $dV = dx_1dy_1\dots dx_ndy_n$, donde identificamos cada z_k con $x_k+\mathrm{i}\,y_k$. Similarmente, sea dS la medida sobre la superficie de $\boldsymbol{S}_n$ sin normalizar. Entonces el volumen Euclidiano del solido determinado por dS en $\boldsymbol{S}_n$, $r>0$, y $r+dr$, esta dado por

$$dV = \frac{dS}{S(1)}(V(r+dr)-V(r).$$

Donde, para $r>0$, $V(r)$ es el volumen de la bola

$$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<r^2$$

y $S(r)$ es el área de la esfera

$$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<r^2.$$

Usando el cambio de variables $z_k = rw_k$, $1\le k\le n$, tenemos:

$$V(r) = \int |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<r^2dV(z) = r^{2n}V(1).$$

Se sigue entonces que

$$dV = \frac{V(1)}{S(1)}((r+dr)^{2n} - r^{2n})dS.$$

Omitiendo las potencias de dr con exponentes mayores a 1 tenemos que

$$dV = \frac{V(1)}{S(1)} 2nr^{2n-1} dr dS$$

o

$$d\nu = 2nr^{2n-1} dr d\sigma.$$

□

Definición 22. Para $\alpha > -1$ definimos la medidad de Lebesgue con peso como

$$d\nu_\alpha = c_\alpha (1 - |z|^2)^\alpha d\nu(z)$$

donde

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}.$$

Es una constante la cual normaliza la medida de $\mathbb{B}_n$.

Lema 23. *Sea $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ un multindice y $\alpha > -1$, entonces*

$$\int\limits_{\boldsymbol{S}_n} |\zeta^m|^2 d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!m!}{(n-1+|m|)!}$$

y

$$\int\limits_{\mathbb{B}_n} |z^m|^2 d\nu_\alpha(z) = \frac{m!\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}.$$

Demostración. Identificaremos a $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}^{2n}$ usando la parte real e imaginaria de un número complejo. Si el volumen Euclidiano de $\mathbb{B}_n$ es c_n, entonces $c_n d\nu = dV$. Ahora evaluaremos la integral siguiente

$$I = \int\limits_{\mathbb{C}^n} |z^m|^2 e^{-|z|^2} dV(z)$$

de dos maneras diferentes. Primero, por el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)^{m_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \pi^n \prod_{k=1}^{n} \int\limits_0^\infty r^{m_k} e^{-r} dr \\ &= \pi^n m!. \end{aligned}$$

Ahora identificando a $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^+ \times \boldsymbol{S}_n$ donde se escribe $z = r\zeta$, tenemos que

$$\begin{aligned} I &= 2nc_n \int_0^\infty r^{2|m|+2n-1} e^{-r^2} dr \int_{\boldsymbol{S}_n} |\zeta^m|^2 d\sigma(\zeta) \\ &= nc_n(|m|+n-1)! \int_{\boldsymbol{S}_n} |\zeta^m|^2 d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Comparando estas dos expresiones tenemos que

$$\int_{\boldsymbol{S}_n} |\zeta^m|^2 d\sigma(\zeta) = \frac{\pi^n m!}{nc_n(|m|+n-1)!}.$$

Tomando entonces $m = (0, \ldots, 0)$ tenemos que:

$$c_n = \frac{\pi^n}{n!}.$$

Se sigue entonces que

$$\int_{\boldsymbol{S}} |\zeta^m|^2 d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!m!}{(n-1+|m|)!}.$$

Ahora, volviendo a identificar a $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^+ \times \boldsymbol{S}_n$ donde se escribe $z = r\zeta$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{bB_n} |z^m|^2 d\nu_\alpha(z) &= 2nc_\alpha \int_0^1 r^{2|m|+2n-1}(1-r^2)^\alpha dr \int_{\boldsymbol{S}_n} |\zeta^m|^2 d\sigma(\zeta) \\ &= nc_\alpha \frac{(n-1)!m!}{(n-1+|m|)!} \int_0^1 r^{|m|+n-1}(1-r)^\alpha dr. \end{aligned}$$

La expresión deseada se sigue de que

$$\int_0^1 r^{n+|m|-1}(1-r)^\alpha dr = \frac{\Gamma(n+|m|)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+|m|+\alpha+1}.$$

$\square$

Referencias

[1] Calin, Ovidiu; Chang, Der-Chen; Greiner, Peter (2007): Geometric Analysis on the Heisenberg Group and Its Generalizations. American Mathematical Society, International Press.

[2] Hall, Brian C. (2003): Lie Groups, Lie Algebras and Representation, An Elementary Introduction, Springer, Cham, doi:10.1007/978-3-319-13467-3.

[3] Krantz, Steven G. (2009): Explorations in Harmonic Analysis with Applications to Complex Function Theory and the Heisenberg Group. Birkhäuser, Basel, doi:10.1007/978-1-4612-1772-5.

[4] Nagel, Alexander (2007): Advanced topics in complex analysis. Lecture notes. http://www.math.wisc.edu/~nagel/Math823Notes.pdf, http://www.math.wisc.edu/~nagel/Math823Notes2.pdf.

[5] Quiroga-Barranco, Raúl; Vasilevski, Nikolai (2007): Commutative C*-algebras of Toeplitz operators on the unit ball, I. Bargmann-type transforms and spectral representations of Toeplitz operators. Integr. Equ. Oper. Th. 59, 379–419, doi:10.1007/s00020-007-1537-6.

[6] Vidal, Raúl E. (2017): Nonlocal heat equations in the Heisenberg Group, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 24:57, doi:10.1007/s00030-017-0479-1.

[7] Cartier, Pierre (1966): Quantum mechanical commutation relations and theta functions, 1966 Algebraic Groups and Discontinous Subgroups (Proc. Sympos. Pura Math., Boulder, Colo., 1965) 361–383, American Mathematical Society.

[8] Fischer, David R. (1981): Functions positive-definite on $\mathbb{R}^3$ and the Heisenberg group, Journal of Functional Analysis Vol. 42 Issue 3 338–346, doi:10.1016/0022-1236(81)90093-8