Fórmula asintótica de Szegő para matrices de Toeplitz de banda

Luis Ángel González Serrano

En base de estudios conjuntos con:

Egor Maximenko y Mario Alberto Moctezuma Salazar

Instituto Politécnico Nacional

24 de Junio del 2021

Plan

Fórmula bialternante para polinomios de Schur

$$\mathrm{s}_\lambda(x_1, \ldots, x_w) = \frac{\det \left[x_k^{\lambda_j + w - j} \right]_{j,k=1}^{w}}{\det \left[x_k^{w-j} \right]_{j,k=1}^{w}}.$$

Fórmula bialternante para polinomios de Schur

$$\mathrm{s}_\lambda(x_1,\ldots,x_w) = \frac{\det\left[x_k^{\lambda_j+w-j}\right]_{j,k=1}^{w}}{\det\left[x_k^{w-j}\right]_{j,k=1}^{w}}.$$

Ejemplo:

$$\mathrm{s}_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+2} & x_2^{\lambda_1+2} & x_3^{\lambda_1+2} \\ x_1^{\lambda_2+1} & x_2^{\lambda_2+1} & x_3^{\lambda_2+1} \\ x_1^{\lambda_3} & x_2^{\lambda_3} & x_3^{\lambda_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 \end{vmatrix}}$$

Polinomios de Laurent

Una función $a : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de Laurent, si se puede escribir en la forma

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Polinomios de Laurent

Una función $a : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de Laurent, si se puede escribir en la forma

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Supongamos $a_{-q} \neq 0$ y $a_p \neq 0$, entonces

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j$$

Polinomios de Laurent

Una función $a : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de Laurent, si se puede escribir en la forma

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Supongamos $a_{-q} \neq 0$ y $a_p \neq 0$, entonces

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j = t^{-q} \sum_{j=0}^{p+q} a_{j-q} t^j$$

Polinomios de Laurent

Una función $a : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de Laurent, si se puede escribir en la forma

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Supongamos $a_{-q} \neq 0$ y $a_p \neq 0$, entonces

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j = t^{-q} \sum_{j=0}^{p+q} a_{j-q} t^j = a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{p+q} (t - x_j),$$

donde $x_1, \ldots, x_{p+q}$ son las raíces de a.

Definición

La matriz de Toeplitz de orden n asociada a un polinomio de Laurent:

$$T_n(a) = \left[a_{j-k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Definición

La matriz de Toeplitz de orden n asociada a un polinomio de Laurent:

$$T_n(a) = \left[a_{j-k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Ejemplo:

$$a(t) = a_{-2}t^{-2} + a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

Definición

La matriz de Toeplitz de orden n asociada a un polinomio de Laurent:

$$T_n(a) = \left[a_{j-k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Ejemplo:

$$a(t) = a_{-2}t^{-2} + a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

$$T_6(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Fórmula de Trench (fórmula bialternante)

Det. de Toeplitz en términos de los polinomios de Schur

$$\det T_n(a) = (-1)^{pn} a_p^n \, \mathrm{s}_{(n^p)}(x_1, \ldots, x_{p+q}).$$

Fórmula de Trench (fórmula bialternante)

Det. de Toeplitz en términos de los polinomios de Schur

$$\det T_n(a) = (-1)^{pn} a_p^n \, \mathrm{s}_{(n^p)}(x_1, \ldots, x_{p+q}).$$

Si escribimos el polinomio de Schur en su forma bialternante, obtenemos la fórmula de Trench:

$$\det T_n(a) = (-1)^{pn} a_p^n \, \frac{\left| \dfrac{\left[x_k^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,p+q}}{\left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,p+q}} \right|}{\det \left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}.$$

Ejemplo: $p = 2$, $q = 2$.

$$\det T_n(a) = a_2^n \frac{\begin{vmatrix} x_1^{n+3} & x_2^{n+3} & x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ x_1^{n+2} & x_2^{n+2} & x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \\ \hline x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \end{vmatrix}}_{\prod\limits_{1 \le j < k \le 4} (x_j - x_k)}}.$$

Teorema de expansión de Laplace por un conjunto de renglones

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sea $r \in \{1,\ldots,n\}$ y sea $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$ tal que $\# J = r$. Entonces

$$\det(A) = \sum_{\substack{K\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ \#K=r}} (-1)^{|J|+|K|}\det(A_K^J)\det(A_{K'}^{J'}).$$

Ejemplo

Pongamos $n = 4,\ r = 2,\ J = \{1, 2\}$.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Fórmula de Widom

$$\det(T_n(a)) = \sum_{\substack{M\subseteq\{1,\ldots,p+q\} \\ |M|=p}} C_M w_M^n,$$

con

$$C_M = \prod_{j\in M} x_j^q \prod_{\substack{j\in M \\ k\in\overline{M}}} (x_j - x_k)^{-1}, \qquad w_M = a_p(-1)^p \prod_{j\in M} x_j.$$

donde $\overline{M} = \{1, 2, \ldots, p+q\}\backslash M$.

Fórmula de Widom

$$\det(T_n(a)) = \sum_{\substack{M\subseteq\{1,\ldots,p+q\}\\ |M|=p}} C_M w_M^n,$$

con

$$C_M = \prod_{j\in M} x_j^q \prod_{\substack{j\in M\\ k\in\overline{M}}} (x_j - x_k)^{-1}, \qquad w_M = a_p(-1)^p \prod_{j\in M} x_j.$$

donde $\overline{M} = \{1, 2, \ldots, p+q\}\setminus M$.

Una demostración posible:
aplicar la expansión de Laplace a la fórmula de Trench.

Plan

Comportamiento de comb. lin. de progr. geom.

Lema

Sean $d_1, \ldots, d_m$ y $c_1, \ldots, c_m$ algunos numeros complejos. Consideremos la sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ definida mediante la regla

$$X_n = \sum_{j=1}^{m} c_j d_j^n.$$

Supongamos que $|d_1| > |d_j|$ para j en $\{2, \ldots, m\}$ y que $c_1 \neq 0$. Entonces

$$X_n = c_1 d_1^n (1 + O(u^n)),$$

donde

$$u = \frac{1}{|d_1|} \max_{2 \leq j \leq m} |d_j|.$$

Demostración:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n + \sum_{j=2}^{m} c_j d_j^n$$

Demostración:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n + \sum_{j=2}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n \left(1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{d_j}{d_1} \right)^n \right)$$

Demostración:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n + \sum_{j=2}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n \left(1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{d_j}{d_1} \right)^n \right)$$

Por la hipótesis $|d_1| > |d_j|$ para cada $j \in \{2, \ldots, m\}$. Luego

$$\left| \sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{d_j}{d_1} \right)^n \right| \leq \frac{1}{|c_1|} \sum_{j=2}^{m} |c_j| \left| \frac{d_j}{d_1} \right|^n$$

Demostración:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n + \sum_{j=2}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n \left(1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1}\left(\frac{d_j}{d_1}\right)^n\right)$$

Por la hipótesis $|d_1| > |d_j|$ para cada $j \in \{2, \ldots, m\}$. Luego

$$\left|\sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1}\left(\frac{d_j}{d_1}\right)^n\right| \le \frac{1}{|c_1|}\sum_{j=2}^{m} |c_j| \left|\frac{d_j}{d_1}\right|^n$$

ya que

$$u = \frac{1}{|d_1|} \max_{2 \le j \le m} |d_j|.$$

Demostración:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n + \sum_{j=2}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n \left(1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{d_j}{d_1} \right)^n \right)$$

Por la hipótesis $|d_1| > |d_j|$ para cada $j \in \{2, \ldots, m\}$. Luego

$$\left| \sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{d_j}{d_1} \right)^n \right| \leq \frac{1}{|c_1|} \sum_{j=2}^{m} |c_j| \left| \frac{d_j}{d_1} \right|^n \leq \frac{u^n}{|c_1|} \sum_{j=2}^{m} |c_j|,$$

ya que

$$u = \frac{1}{|d_1|} \max_{2 \leq j \leq m} |d_j|.$$

Demostración:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n + \sum_{j=2}^{m} c_j d_j^n = c_1 d_1^n \left(1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{d_j}{d_1} \right)^n \right)$$

Por la hipótesis $|d_1| > |d_j|$ para cada $j \in \{2, \ldots, m\}$. Luego

$$\left| \sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{d_j}{d_1} \right)^n \right| \leq \frac{1}{|c_1|} \sum_{j=2}^{m} |c_j| \left| \frac{d_j}{d_1} \right|^n \leq \frac{u^n}{|c_1|} \sum_{j=2}^{m} |c_j|,$$

ya que

$$u = \frac{1}{|d_1|} \max_{2 \leq j \leq m} |d_j|.$$

Por lo tanto,

$$\left| \sum_{j=2}^{m} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{d_j}{d_1} \right)^n \right| = O(u^n).$$

Plan

1. Repaso
2. Comportamiento de combinaciones lineales de progresiones geométricas
3. Demostración de la fórmula de Szegő a partir de la fórmula de Widom
4. Idea intuitiva de la demostración de la fórmula de Szegő a partir de la fórmula de Trench
5. Fórmula de Szegő en el lenguaje analítico

Teorema fuerte de Szegő

Sea $a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j$ un polinomio de Laurent con $p+q$ raíces diferentes a pares, tales que

$$|x_1| \le |x_2| \le \ldots \le |x_q| < 1 < |x_{q+1}| \le \ldots \le |x_{p+q}|.$$

Entonces existe $u \in (0,1)$ tal que

$$\det T_n(a) = G(a)^n\, E(a)\, (1 + O(u^n)),$$

donde

$$G(a) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j, \qquad E(a) = \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^q \prod_{j=q+1}^{p+q} \prod_{l=1}^{q} \frac{1}{x_j - x_l}.$$

Ejemplo

$$G(a) = a_p(-1)^p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j, \qquad E(a) = \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^q \prod_{j=q+1}^{p+q} \prod_{l=1}^{q} \frac{1}{x_j - x_l}.$$

Ejemplo

$$G(a) = a_p(-1)^p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j, \qquad E(a) = \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^q \prod_{j=q+1}^{p+q} \prod_{l=1}^{q} \frac{1}{x_j - x_l}.$$

Supongamos que $p = 2$, $q = 1$, entonces

$$G(a) = (-1)^2 a_2 \prod_{j=2}^{3} x_j = a_2 x_2 x_3,$$

.

Ejemplo

$$G(a) = a_p(-1)^p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j, \qquad E(a) = \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^q \prod_{j=q+1}^{p+q} \prod_{l=1}^{q} \frac{1}{x_j - x_l}.$$

Supongamos que $p = 2$, $q = 1$, entonces

$$G(a) = (-1)^2 a_2 \prod_{j=2}^{3} x_j = a_2 x_2 x_3,$$

$$E(a) = \prod_{j=2}^{3} x_j \prod_{j=2}^{3} \prod_{l=1}^{1} \frac{1}{x_j - x_l} = \frac{x_2 x_3}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}.$$

Ejemplo

$$G(a) = a_p(-1)^p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j, \qquad E(a) = \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^q \prod_{j=q+1}^{p+q} \prod_{l=1}^{q} \frac{1}{x_j - x_l}.$$

Supongamos que $p = 2$, $q = 1$, entonces

$$G(a) = (-1)^2 a_2 \prod_{j=2}^{3} x_j = a_2 x_2 x_3,$$

$$E(a) = \prod_{j=2}^{3} x_j \prod_{j=2}^{3} \prod_{l=1}^{1} \frac{1}{x_j - x_l} = \frac{x_2 x_3}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}.$$

El teorema de Szegő afirma que

$$\det T_n(a) \approx (G(a))^n E(a)$$

Ejemplo

$$G(a) = a_p(-1)^p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j, \qquad E(a) = \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^q \prod_{j=q+1}^{p+q} \prod_{l=1}^{q} \frac{1}{x_j - x_l}.$$

Supongamos que $p = 2$, $q = 1$, entonces

$$G(a) = (-1)^2 a_2 \prod_{j=2}^{3} x_j = a_2 x_2 x_3,$$

$$E(a) = \prod_{j=2}^{3} x_j \prod_{j=2}^{3} \prod_{l=1}^{1} \frac{1}{x_j - x_l} = \frac{x_2 x_3}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}.$$

El teorema de Szegő afirma que

$$\det T_n(a) \approx (G(a))^n E(a) = a_2^n \frac{x_2^{n+1} x_3^{n+1}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}.$$

Widom → Szegő

$$C_M = \prod_{j\in M} x_j^q \prod_{\substack{j\in M \\ k\in \overline{M}}} \frac{1}{x_j - x_k}, \qquad w_M = a_p(-1)^p \prod_{j\in M} x_j,$$

la variable M debe cumplir que $M \subseteq \{1,\ldots,p+q\}$ y $|M| = p$.

Widom → Szegő

$$C_M = \prod_{j\in M} x_j^q \prod_{\substack{j\in M\\ k\in \overline{M}}} \frac{1}{x_j - x_k}, \qquad w_M = a_p(-1)^p \prod_{j\in M} x_j,$$

la variable M debe cumplir que $M \subseteq \{1,\ldots,p+q\}$ y $|M| = p$.

Ejemplo: $p = 2$ y $q = 1$.

La variable M recorre los conjuntos $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.

Widom $\to$ Szegő

$$C_M = \prod_{j\in M} x_j^q \prod_{\substack{j\in M\\ k\in\overline{M}}} \frac{1}{x_j - x_k}, \qquad w_M = a_p(-1)^p \prod_{j\in M} x_j,$$

la variable M debe cumplir que $M \subseteq \{1,\ldots,p+q\}$ y $|M| = p$.

Ejemplo: $p = 2$ y $q = 1$.

La variable M recorre los conjuntos $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.

$$C_{\{1,2\}} = \frac{x_1x_2}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}, \qquad w_{\{1,2\}} = a_2x_1x_2,$$

Widom $\to$ Szegő

$$C_M = \prod_{j\in M} x_j^q \prod_{\substack{j\in M\\ k\in\overline{M}}} \frac{1}{x_j - x_k}, \qquad w_M = a_p(-1)^p \prod_{j\in M} x_j,$$

la variable M debe cumplir que $M \subseteq \{1,\ldots,p+q\}$ y $|M| = p$.

Ejemplo: $p = 2$ y $q = 1$.

La variable M recorre los conjuntos $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.

$$C_{\{1,2\}} = \frac{x_1x_2}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}, \qquad w_{\{1,2\}} = a_2x_1x_2,$$

$$C_{\{1,3\}} = \frac{x_1x_3}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)}, \qquad w_{\{1,3\}} = a_2x_1x_3,$$

Widom → Szegő

$$C_M = \prod_{j\in M} x_j^q \prod_{\substack{j\in M\\ k\in\overline{M}}} \frac{1}{x_j - x_k}, \qquad w_M = a_p(-1)^p \prod_{j\in M} x_j,$$

la variable M debe cumplir que $M \subseteq \{1,\ldots,p+q\}$ y $|M| = p$.

Ejemplo: $p = 2$ y $q = 1$.

La variable M recorre los conjuntos $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.

$$C_{\{1,2\}} = \frac{x_1x_2}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}, \qquad w_{\{1,2\}} = a_2x_1x_2,$$

$$C_{\{1,3\}} = \frac{x_1x_3}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)}, \qquad w_{\{1,3\}} = a_2x_1x_3,$$

$$C_{\{2,3\}} = \frac{x_2x_3}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}, \qquad w_{\{2,3\}} = a_2x_2x_3.$$

$$\det T_n(a) = a_2^n \left(\frac{(x_1x_2)^{n+1}}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} + \frac{(x_1x_3)^{n+1}}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)} + \frac{(x_2x_3)^{n+1}}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} \right).$$

$$\det T_n(a) = a_2^n \left(\frac{(x_1 x_2)^{n+1}}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} + \frac{(x_1 x_3)^{n+1}}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} + \frac{(x_2 x_3)^{n+1}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \right).$$

Las normas de las raíces están ordenadas de la siguiente manera:

$$|x_1| < 1 < |x_2| \leq |x_3|.$$

$$\det T_n(a) = a_2^n \left(\frac{(x_1 x_2)^{n+1}}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} + \frac{(x_1 x_3)^{n+1}}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} + \frac{(x_2 x_3)^{n+1}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \right).$$

Las normas de las raíces están ordenadas de la siguiente manera:

$$|x_1| < 1 < |x_2| \le |x_3|.$$

Cuando n es grande, de estos tres sumandos el más grande (en el sentido absoluto) es el tercero, y obtenemos la fórmula asintótica

$$\det T_n(a) \approx a_2^n \, \frac{(x_2 x_3)^{n+1}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}.$$

Demostración del teorema de Szegő

Por hipótesis, tenemos que

$$a(t) = a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{p+q} (t - x_j), \qquad t \in \mathbb{T},$$

tal que

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \ldots \leq |x_q| < 1 < |x_{q+1}| \leq \ldots \leq |x_{p+q}|.$$

Demostración del teorema de Szegő

Por hipótesis, tenemos que

$$a(t) = a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{p+q} (t - x_j), \qquad t \in \mathbb{T},$$

tal que

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \ldots \leq |x_q| < 1 < |x_{q+1}| \leq \ldots \leq |x_{p+q}|.$$

Sean

$$u = \frac{|x_q|}{|x_{q+1}|}, \qquad M_0 = \{q+1, \ldots, p+q\}.$$

Supongamos que $M \neq M_0$,

$$M = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \subseteq \{1, 2, \ldots, p+q\}, \quad \text{tal que} \quad j_1 < \ldots < j_p.$$

Supongamos que $M \neq M_0$,

$M = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \subseteq \{1, 2, \ldots, p+q\}, \quad$ tal que $\quad j_1 < \ldots < j_p$.

Si $j_1 = q + 1$, entonces $M = M_0$, esto implica que

$$j_1 < q + 1, \quad \text{es decir,} \quad j_1 \leq q.$$

Supongamos que $M \neq M_0$,

$M = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \subseteq \{1, 2, \ldots, p+q\}$, tal que $j_1 < \ldots < j_p$.

Si $j_1 = q + 1$, entonces $M = M_0$, esto implica que

$$j_1 < q + 1, \quad \text{es decir,} \quad j_1 \leq q.$$

Entonces

$$\frac{|w_M|}{|w_{M_0}|} = \frac{|x_{j_1}||x_{j_2}| \ldots |x_{j_p}|}{|x_{q+1}||x_{q+2}| \ldots |x_{p+q}|}$$

Supongamos que $M \neq M_0$,

$M = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \subseteq \{1, 2, \ldots, p+q\}, \quad \text{tal que} \quad j_1 < \ldots < j_p.$

Si $j_1 = q+1$, entonces $M = M_0$, esto implica que

$$j_1 < q+1, \quad \text{es decir,} \quad j_1 \leq q.$$

Entonces

$$\frac{|w_M|}{|w_{M_0}|} = \frac{|x_{j_1}||x_{j_2}|\ldots|x_{j_p}|}{|x_{q+1}||x_{q+2}|\ldots|x_{p+q}|} \leq \frac{|x_{j_1}|}{|x_{q+1}|}$$

Supongamos que $M \neq M_0$,

$M = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \subseteq \{1, 2, \ldots, p+q\}, \quad \text{tal que} \quad j_1 < \ldots < j_p.$

Si $j_1 = q+1$, entonces $M = M_0$, esto implica que

$$j_1 < q+1, \quad \text{es decir,} \quad j_1 \leq q.$$

Entonces

$$\frac{|w_M|}{|w_{M_0}|} = \frac{|x_{j_1}||x_{j_2}| \ldots |x_{j_p}|}{|x_{q+1}||x_{q+2}| \ldots |x_{p+q}|} \leq \frac{|x_{j_1}|}{|x_{q+1}|} \leq \frac{|x_q|}{|x_{q+1}|}$$

Supongamos que $M \neq M_0$,

$M = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \subseteq \{1, 2, \ldots, p+q\}, \quad \text{tal que} \quad j_1 < \ldots < j_p.$

Si $j_1 = q+1$, entonces $M = M_0$, esto implica que

$$j_1 < q+1, \quad \text{es decir,} \quad j_1 \leq q.$$

Entonces

$$\frac{|w_M|}{|w_{M_0}|} = \frac{|x_{j_1}||x_{j_2}|\ldots|x_{j_p}|}{|x_{q+1}||x_{q+2}|\ldots|x_{p+q}|} \leq \frac{|x_{j_1}|}{|x_{q+1}|} \leq \frac{|x_q|}{|x_{q+1}|} = u.$$

Por Widom y por el resultado del comportamiento de combinaciones lineales de progresiones geométricas,

$$\det T_n(a) = \sum_M C_M w_M^n = w_{M_0}^n C_{M_0}(1 + O(u^n)).$$

Por Widom y por el resultado del comportamiento de combinaciones lineales de progresiones geométricas,

$$\det T_n(a) = \sum_M C_M w_M^n = w_{M_0}^n C_{M_0}(1 + O(u^n)).$$

Además,

$$\begin{aligned} w_{M_0} &= a_p(-1)^p \prod_{j \in M_0} x_j, \\ C_{M_0} &= \prod_{j \in M_0} x_j^q \prod_{\substack{j \in M_0 \\ k \in \overline{M_0}}} (x_j - x_k)^{-1}. \end{aligned}$$

Plan

1. Repaso
2. Comportamiento de combinaciones lineales de progresiones geométricas
3. Demostración de la fórmula de Szegő a partir de la fórmula de Widom
4. Idea intuitiva de la demostración de la fórmula de Szegő a partir de la fórmula de Trench
5. Fórmula de Szegő en el lenguaje analítico

Trench → Szegő: ejemplo pentadiagonal

Explicamos la idea para $p = 2$, $q = 2$.

$$\det T_n(a) = \frac{a_2^n}{\prod\limits_{1 \le j < k \le 4} (x_j - x_k)} \begin{vmatrix} x_1^{n+3} & x_2^{n+3} & x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ x_1^{n+2} & x_2^{n+2} & x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

.

Trench → Szegő: ejemplo pentadiagonal

Explicamos la idea para $p = 2$, $q = 2$.

$$\det T_n(a) = \frac{a_2^n}{\prod\limits_{1\le j<k\le 4}(x_j - x_k)} \begin{vmatrix} x_1^{n+3} & x_2^{n+3} & x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ x_1^{n+2} & x_2^{n+2} & x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

.

Trench → Szegő: ejemplo pentadiagonal

Explicamos la idea para $p = 2$, $q = 2$.

$$\det T_n(a) = \frac{a_2^n}{\prod\limits_{1\le j<k\le 4} (x_j - x_k)} \begin{vmatrix} x_1^{n+3} & x_2^{n+3} & x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ x_1^{n+2} & x_2^{n+2} & x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\approx \frac{a_2^n}{\prod\limits_{1\le j<k\le 4} (x_j - x_k)} \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ 0 & 0 & x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

.

Trench → Szegő: ejemplo pentadiagonal

Explicamos la idea para $p = 2$, $q = 2$.

$$\det T_n(a) = \frac{a_2^n}{\prod\limits_{1\le j<k\le 4}(x_j - x_k)} \begin{vmatrix} x_1^{n+3} & x_2^{n+3} & x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ x_1^{n+2} & x_2^{n+2} & x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\approx \frac{a_2^n}{\prod\limits_{1\le j<k\le 4}(x_j - x_k)} \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ 0 & 0 & x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$$= \frac{a_2^n}{\prod\limits_{1\le j<k\le 4}(x_j - x_k)} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \end{vmatrix}.$$

$$\frac{a_2^n}{\prod_{1\le j<k\le 4}(x_j - x_k)} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{a_2^n}{\prod_{1\le j<k\le 4}(x_j-x_k)}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a_2^n}{\prod_{1\le j<k\le 4}(x_j-x_k)}(x_1-x_2)\cdot(x_3x_4)^{n+2}\cdot(x_3-x_4)$$

$$\frac{a_2^n}{\prod\limits_{1\le j<k\le 4}(x_j-x_k)}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_3^{n+3} & x_4^{n+3} \\ x_3^{n+2} & x_4^{n+2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a_2^n}{\prod\limits_{1\le j<k\le 4}(x_j-x_k)}(x_1-x_2)\cdot(x_3x_4)^{n+2}\cdot(x_3-x_4)$$

$$= a_2^n\,\frac{x_3^{n+2}x_4^{n+2}}{(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}.$$

Trench → Szegő: Idea intuitiva

$$\det T_n(a) = (-1)^{pn} a_p^n \, \frac{\left| \dfrac{\left[x_k^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,p+q}}{\left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,p+q}} \right|}{\det \left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}.$$

Trench → Szegő: Idea intuitiva

$$\det T_n(a) = (-1)^{pn} a_p^n \frac{\left| \dfrac{\left[x_k^{n+p+q-j} \right]_{j,k=1}^{p,p+q}}{\left[x_k^{q-j} \right]_{j,k=1}^{q,p+q}} \right|}{\det \left[x_k^{p+q-j} \right]_{j,k=1}^{p+q}}.$$

Separemos por bloques la matriz del numerador y recordemos que

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \ldots \leq |x_q| < 1 < |x_{q+1}| \leq \ldots \leq |x_{p+q}|.$$

Trench → Szegő: Idea intuitiva

$$\det T_n(a) = (-1)^{pn} a_p^n \, \frac{\left| \dfrac{\left[x_k^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,p+q}}{\left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,p+q}} \right|}{\det \left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}.$$

Separemos por bloques la matriz del numerador y recordemos que

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \ldots \leq |x_q| < 1 < |x_{q+1}| \leq \ldots \leq |x_{p+q}|.$$

$$\left| \begin{array}{c|c} \left[x_k^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,q} & \left[x_{q+k}^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,p} \\ \hline \left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,q} & \left[x_{q+k}^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,p} \end{array} \right|$$

Trench → Szegő: Idea intuitiva

$$\det T_n(a) = (-1)^{pn} a_p^n \, \frac{\left| \dfrac{\left[x_k^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,p+q}}{\left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,p+q}} \right|}{\det \left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}.$$

Separemos por bloques la matriz del numerador y recordemos que

$$|x_1| \le |x_2| \le \ldots \le |x_q| < 1 < |x_{q+1}| \le \ldots \le |x_{p+q}|.$$

$$\left| \begin{array}{c|c} \left[x_k^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,q} & \left[x_{q+k}^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,p} \\ \hline \left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,q} & \left[x_{q+k}^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,p} \end{array} \right| \approx \left| \begin{array}{c|c} 0 & \left[x_{q+k}^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,p} \\ \hline \left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,q} & \left[x_{q+k}^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,p} \end{array} \right|.$$

$$\det T_n(a) \approx (-1)^{pn} a_p^n \, \frac{\det \left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,q} \det \left[x_{q+k}^{n+p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p,p}}{\det \left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}$$

$$\det T_n(a) \approx (-1)^{pn} a_p^n \, \frac{\det\left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,q} \det\left[x_{q+k}^{n+q+p-j}\right]_{j,k=1}^{p,p}}{\det\left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}$$

$$\det T_n(a) \approx (-1)^{pn} a_p^n \, \frac{\det\left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,q} \det\left[x_{q+k}^{n+q+p-j}\right]_{j,k=1}^{p,p}}{\det\left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}$$

$$= (-1)^{pn} a_p^n \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^{n+q} \, \frac{\det\left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,q} \det\left[x_{q+k}^{p-j}\right]_{j,k=1}^{p,p}}{\det\left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}$$

$$\det T_n(a) \approx (-1)^{pn} a_p^n \, \frac{\det \left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,q} \det \left[x_{q+k}^{n+q+p-j}\right]_{j,k=1}^{p,p}}{\det \left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}$$

$$= (-1)^{pn} a_p^n \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^{n+q} \, \frac{\det \left[x_k^{q-j}\right]_{j,k=1}^{q,q} \det \left[x_{q+k}^{p-j}\right]_{j,k=1}^{p,p}}{\det \left[x_k^{p+q-j}\right]_{j,k=1}^{p+q}}$$

$$= \underbrace{\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j \right)}_{G(a)}{}^{n} \underbrace{\left(\prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^q \prod_{j=q+1}^{p+q} \prod_{l=1}^{q} \frac{1}{x_j - x_l} \right)}_{E(a)}.$$

Plan

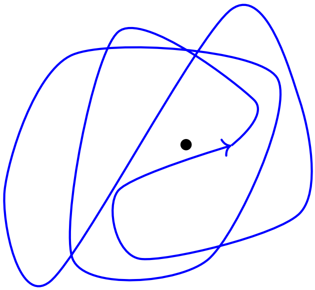
Definición (el indice o el número de vueltas de una función)

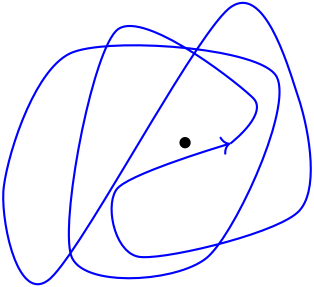
Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$.

$$\operatorname{wind}(f) \coloneqq \frac{g(2\pi) - g(0)}{2\pi i},$$

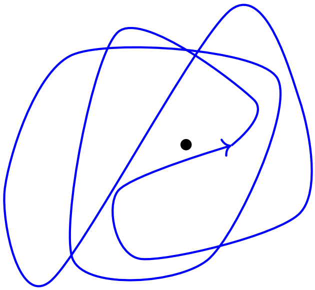
donde g es algún logaritmo continuo de f, es decir,

$$g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \qquad f = \exp(g).$$

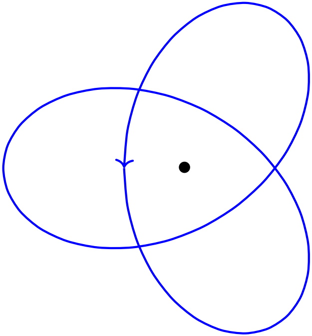


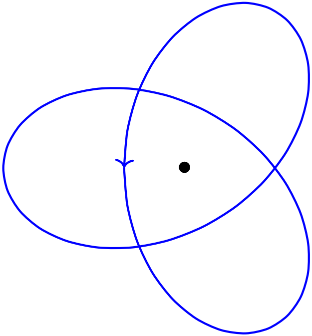


$$\mathrm{wind}(f) =$$

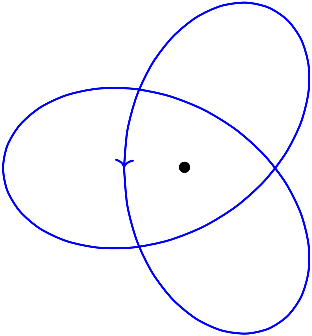


$$\mathrm{wind}(f) = 1.$$





$$\mathrm{wind}(f) =$$



$$\mathrm{wind}(f) = 2.$$

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$ tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq 1 + \mathbb{D}$. Entonces

$$\operatorname{wind}(f) = 0.$$

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$ tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq 1 + \mathbb{D}$. Entonces

$$\operatorname{wind}(f) = 0.$$

Idea de demostración. Ya que f toma valores en $1 + \mathbb{D}$, construimos su logaritmo continuo mediante la serie de Mercator:

$$g(x) = \log_1(f(x))$$

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$ tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq 1 + \mathbb{D}$. Entonces

$$\operatorname{wind}(f) = 0.$$

Idea de demostración. Ya que f toma valores en $1 + \mathbb{D}$, construimos su logaritmo continuo mediante la serie de Mercator:

$$g(x) = \log_1(f(x)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - f(x))^n}{n}.$$

Proposición

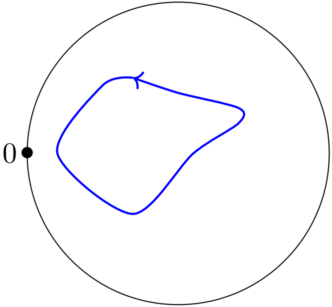
Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$ tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq 1 + \mathbb{D}$. Entonces

$$\operatorname{wind}(f) = 0.$$

Idea de demostración. Ya que f toma valores en $1 + \mathbb{D}$, construimos su logaritmo continuo mediante la serie de Mercator:

$$g(x) = \log_1(f(x)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - f(x))^n}{n}.$$

Como $f(2\pi) = f(0)$, se tiene que $g(2\pi) = g(0)$.



$$\mathrm{wind}(f) = 0.$$

Proposición

Sean $f_1, f_2 \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}\backslash\{0\})$. Entonces

$$\mathrm{wind}(f_1 f_2) = \mathrm{wind}(f_1) + \mathrm{wind}(f_2).$$

Proposición

Sean $f_1, f_2 \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}\backslash\{0\})$. Entonces

$$\operatorname{wind}(f_1 f_2) = \operatorname{wind}(f_1) + \operatorname{wind}(f_2).$$

Idea de la demostración.
Encontramos g_1 y g_2, tal que

$$\exp(g_1) = f_1, \qquad \exp(g_2) = f_2.$$

Proposición

Sean $f_1, f_2 \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$. Entonces

$$\operatorname{wind}(f_1 f_2) = \operatorname{wind}(f_1) + \operatorname{wind}(f_2).$$

Idea de la demostración.
Encontramos g_1 y g_2, tal que

$$\exp(g_1) = f_1, \qquad \exp(g_2) = f_2.$$

Entonces $g_1 + g_2$ es un logaritmo continuo de $f_1 f_2$:

$$f_1 f_2 = \exp(g_1 + g_2).$$

Dada una función $a \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}\backslash\{0\})$, definimos $\mathrm{wind}(a)$ como

$$\mathrm{wind}(a) = \mathrm{wind}(g),$$

donde $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$g(x) = a(e^{ix}).$$

Dada una función $a \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$, definimos $\operatorname{wind}(a)$ como

$$\operatorname{wind}(a) = \operatorname{wind}(g),$$

donde $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$g(x) = a(e^{ix}).$$

Corolario

Sea $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$ tal que $f(\mathbb{T}) \subseteq 1 + \mathbb{D}$. Entonces $\operatorname{wind}(f) = 0$.

Dada una función $a \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}\backslash\{0\})$, definimos $\mathrm{wind}(a)$ como

$$\mathrm{wind}(a) = \mathrm{wind}(g),$$

donde $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$g(x) = a(e^{ix}).$$

Corolario

Sea $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}\backslash\{0\})$ tal que $f(\mathbb{T}) \subseteq 1 + \mathbb{D}$. Entonces $\mathrm{wind}(f) = 0$.

Corolario

Sean $f_1, f_2 \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}\backslash\{0\})$. Entonces

$$\mathrm{wind}(f_1 f_2) = \mathrm{wind}(f_1) + \mathrm{wind}(f_2).$$

Ejemplo

Sea $p \in \mathbb{Z}$. Definimos $\chi_p : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$\chi_p(t) = t^p, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Entonces $\operatorname{wind}(\chi_p) = p$.

Ejemplo

Sea $p \in \mathbb{Z}$. Definimos $\chi_p : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$\chi_p(t) = t^p, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Entonces $\operatorname{wind}(\chi_p) = p$.

Demostración:

$$\chi_p(e^{ix}) = \exp(g(x)), \qquad g(x) = pix.$$

$$\operatorname{wind}(\chi_p) = \frac{g(2\pi) - g(0)}{2\pi i} = \frac{2\pi i \cdot p}{2\pi i} = p.$$

Ejemplo

Sea $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, definamos $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ como

$$f(t) = c, \qquad t \in \mathbb{T},$$

entonces $\operatorname{wind}(f) = 0$.

Ejemplo

Sea $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, definamos $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ como

$$f(t) = c, \qquad t \in \mathbb{T},$$

entonces $\mathrm{wind}(f) = 0$.

En efecto, como $g(x)$ sirve cualquier constante c_1 tal que $c = e^{c_1}$.

Proposición

Sea a un polinomio de Laurent

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j, \qquad t \in \mathbb{T},$$

con $0 \notin a(\mathbb{T})$. Entonces

$$\operatorname{wind}(a) = r - q,$$

donde r es el número de raíces de a dentro de $\mathbb{T}$.

Proposición

Sea a un polinomio de Laurent

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j, \qquad t \in \mathbb{T},$$

con $0 \notin a(\mathbb{T})$. Entonces

$$\mathrm{wind}(a) = r - q,$$

donde r es el número de raíces de a dentro de $\mathbb{T}$.

Corolario

$\mathrm{wind}(a) = 0$ si, y solo si, a tiene q raíces dentro y p raíces fuera de $\mathbb{T}$.

Demostración: Supongamos r el número de raíces dentro y s el número de raíces fuera de la circunferencia unitaria:

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \ldots |x_r| < 1 < |x_{r+1}| \leq \ldots \leq |x_{s+r}|.$$

Demostración: Supongamos r el número de raíces dentro y s el número de raíces fuera de la circunferencia unitaria:

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \ldots |x_r| < 1 < |x_{r+1}| \leq \ldots \leq |x_{s+r}|.$$

Podemos escribir al polinomio a de la siguiente manera:

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j$$

Demostración: Supongamos r el número de raíces dentro y s el número de raíces fuera de la circunferencia unitaria:

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \ldots |x_r| < 1 < |x_{r+1}| \leq \ldots \leq |x_{s+r}|.$$

Podemos escribir al polinomio a de la siguiente manera:

$$a(t) = \sum_{j=-q}^{p} a_j t^j = a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{r} (t - x_j) \prod_{k=r+1}^{s+r} (t - x_k) \, .$$

$$a(t) = a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{r} (t - x_j) \prod_{k=r+1}^{s+r} (t - x_k)$$

$$
\begin{aligned}
a(t) &= a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{r} (t - x_j) \prod_{k=r+1}^{s+r} (t - x_k) \\
&= \underbrace{(-1)^s \, a_p \prod_{k=r+1}^{s+r} x_k}_{\in \mathbb{C}\setminus\{0\}} \quad t^{r-q} \quad \prod_{j=1}^{r} \underbrace{\left(1 - \frac{x_j}{t}\right)}_{\in 1+\mathbb{D}} \prod_{k=r+1}^{s+r} \underbrace{\left(1 - \frac{t}{x_k}\right)}_{\in 1+\mathbb{D}}.
\end{aligned}
$$

$$a(t) = a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{r} (t - x_j) \prod_{k=r+1}^{s+r} (t - x_k)$$

$$= \underbrace{(-1)^s \, a_p \prod_{k=r+1}^{s+r} x_k}_{\in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \quad t^{r-q} \quad \prod_{j=1}^{r} \underbrace{\left(1 - \frac{x_j}{t}\right)}_{\in 1+\mathbb{D}} \prod_{k=r+1}^{s+r} \underbrace{\left(1 - \frac{t}{x_k}\right)}_{\in 1+\mathbb{D}}.$$

Entonces

$$\operatorname{wind}(a) = r - q.$$

$$
\begin{aligned}
a(t) &= a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{r} (t - x_j) \prod_{k=r+1}^{s+r} (t - x_k) \\
&= \underbrace{(-1)^s \, a_p \prod_{k=r+1}^{s+r} x_k}_{\in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \quad t^{r-q} \quad \prod_{j=1}^{r} \underbrace{\left(1 - \frac{x_j}{t}\right)}_{\in 1+\mathbb{D}} \prod_{k=r+1}^{s+r} \underbrace{\left(1 - \frac{t}{x_k}\right)}_{\in 1+\mathbb{D}}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\operatorname{wind}(a) = r - q.$$

En particular,

$$\operatorname{wind}(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = q.$$

$$a(t) = a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{r} (t - x_j) \prod_{k=r+1}^{s+r} (t - x_k)$$

$$= \underbrace{(-1)^s \, a_p \prod_{k=r+1}^{s+r} x_k}_{\in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \quad t^{r-q} \quad \prod_{j=1}^{r} \underbrace{\left(1 - \frac{x_j}{t}\right)}_{\in 1+\mathbb{D}} \prod_{k=r+1}^{s+r} \underbrace{\left(1 - \frac{t}{x_k}\right)}_{\in 1+\mathbb{D}}.$$

Entonces

$$\operatorname{wind}(a) = r - q.$$

En particular,

$$\operatorname{wind}(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = q.$$

Otra forma equivalente de la última condición:

$$|x_1| \le |x_2| \le \ldots \le |x_q| < 1 < |x_{q+1}| \le \ldots \le |x_{p+q}|.$$

Funciones G y E via $\log(a)$

Sea a un polinomio de Laurent, tal que

$$0 \notin a(\mathbb{T}) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{wind}(a) = 0.$$

Funciones G y E via $\log(a)$

Sea a un polinomio de Laurent, tal que

$$0 \notin a(\mathbb{T}) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{wind}(a) = 0.$$

Por lo visto antes, a tiene q raíces dentro de $\mathbb{T}$,
y podemos ordenar sus raíces de la siguiente forma:

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \ldots \leq |x_q| < 1 < |x_{q+1}| \leq \ldots \leq |x_{p+q}|.$$

Funciones G y E via $\log(a)$

Sea a un polinomio de Laurent, tal que

$$0 \notin a(\mathbb{T}) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{wind}(a) = 0.$$

Por lo visto antes, a tiene q raíces dentro de $\mathbb{T}$,
y podemos ordenar sus raíces de la siguiente forma:

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \ldots \leq |x_q| < 1 < |x_{q+1}| \leq \ldots \leq |x_{p+q}|.$$

Por lo tanto,

$$a(t) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j \prod_{j=1}^{q} \left(1 - \frac{x_j}{t}\right) \prod_{j=q+1}^{p+q} \left(1 - \frac{t}{x_j}\right).$$

$$h(t) = \log(a(t))$$

$$h(t) = \log(a(t)) = \log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j \prod_{j=1}^{q}\left(1 - \frac{x_j}{t}\right) \prod_{j=q+1}^{p+q}\left(1 - \frac{t}{x_j}\right)\right)$$

$$\log_1(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

$$\begin{aligned} h(t) = \log(a(t)) &= \log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j \prod_{j=1}^{q}\left(1-\frac{x_j}{t}\right) \prod_{j=q+1}^{p+q}\left(1-\frac{t}{x_j}\right)\right) \\ &= \log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j\right) + \sum_{j=1}^{q} \log_1\left(1-\frac{x_j}{t}\right) + \sum_{j=q+1}^{p+q} \log_1\left(1-\frac{t}{x_j}\right) \end{aligned}$$

$$\log_1(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

$$\begin{aligned}
h(t) = \log(a(t)) &= \log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j \prod_{j=1}^{q} \left(1 - \frac{x_j}{t}\right) \prod_{j=q+1}^{p+q} \left(1 - \frac{t}{x_j}\right)\right) \\
&= \log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j\right) + \sum_{j=1}^{q} \log_1\left(1 - \frac{x_j}{t}\right) + \sum_{j=q+1}^{p+q} \log_1\left(1 - \frac{t}{x_j}\right) \\
&= \log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q} -\frac{x_j^k}{k\, t^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{p+q} -\frac{t^k}{k\, x_j^k}
\end{aligned}$$

$$\log_1(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

$$\begin{aligned}
h(t) = \log(a(t)) &= \log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j \prod_{j=1}^{q}\left(1-\frac{x_j}{t}\right)\prod_{j=q+1}^{p+q}\left(1-\frac{t}{x_j}\right)\right)\\
&= \log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j\right) + \sum_{j=1}^{q}\log_1\left(1-\frac{x_j}{t}\right) + \sum_{j=q+1}^{p+q}\log_1\left(1-\frac{t}{x_j}\right)\\
&= \log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{q} -\frac{x_j^k}{k\,t^k} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=q+1}^{p+q} -\frac{t^k}{k\,x_j^k}\\
&= \underbrace{\log\left((-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j\right)}_{h_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{q} x_j^k}_{h_{-k}} \frac{1}{t^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{-\frac{1}{k}\sum_{j=q+1}^{p+q}\frac{1}{x_j^k}}_{h_k} t^k.
\end{aligned}$$

$$\exp(h_0)$$

$$\exp(h_0) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j$$

$$\exp(h_0) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j = G(a),$$

$$\exp(h_0) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j = G(a),$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\ h_k\ h_{-k}\right)$$

$$\exp(h_0) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j = G(a),$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\ h_k\ h_{-k}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k \left(-\frac{1}{k}\sum_{j=q+1}^{p+q}\frac{1}{x_j^k}\right)\left(-\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{q} x_l^k\right)\right)$$

$$\exp(h_0) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j = G(a),$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\ h_k\ h_{-k}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k \left(-\frac{1}{k}\sum_{j=q+1}^{p+q}\frac{1}{x_j^k}\right)\left(-\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{q} x_l^k\right)\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{j=q+1}^{p+q}\sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x_l}{x_j}\right)\right)$$

$$\exp(h_0) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j = G(a),$$

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\ h_k\ h_{-k}\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k \left(-\frac{1}{k}\sum_{j=q+1}^{p+q}\frac{1}{x_j^k}\right)\left(-\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{q} x_l^k\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{j=q+1}^{p+q}\sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x_l}{x_j}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{l=1}^{q}\sum_{j=q+1}^{p+q}\log\left(1-\frac{x_l}{x_j}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\exp(h_0) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j = G(a),$$

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\ h_k\ h_{-k}\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k \left(-\frac{1}{k}\sum_{j=q+1}^{p+q}\frac{1}{x_j^k}\right)\left(-\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{q} x_l^k\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{j=q+1}^{p+q}\sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x_l}{x_j}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{l=1}^{q}\sum_{j=q+1}^{p+q}\log\left(1-\frac{x_l}{x_j}\right)\right) \\
&= \prod_{j=q+1}^{p+q}\prod_{l=1}^{q}\frac{x_j}{x_j-x_l} = \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^q \prod_{j=q+1}^{p+q}\prod_{l=1}^{q}\frac{1}{x_j-x_l}
\end{aligned}$$

$$\exp(h_0) = (-1)^p a_p \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j = G(a),$$

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\ h_k\ h_{-k}\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(-\frac{1}{k}\sum_{j=q+1}^{p+q}\frac{1}{x_j^k}\right)\left(-\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{q} x_l^k\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{j=q+1}^{p+q}\sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x_l}{x_j}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{l=1}^{q}\sum_{j=q+1}^{p+q}\log\left(1-\frac{x_l}{x_j}\right)\right) \\
&= \prod_{j=q+1}^{p+q}\prod_{l=1}^{q}\frac{x_j}{x_j - x_l} = \prod_{j=q+1}^{p+q} x_j^q \prod_{j=q+1}^{p+q}\prod_{l=1}^{q}\frac{1}{x_j - x_l} \\
&= E(a).
\end{aligned}$$

$G(a)$ es la media geométrica de a

Denotamos por h algún logaritmo continuo de a.

$G(a)$ es la media geométrica de a

Denotamos por h algún logaritmo continuo de a.

Su 0-ésimo coeficiente de Fourier es

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{ix})\,\mathrm{d}x.$$

$G(a)$ es la media geométrica de a

Denotamos por h algún logaritmo continuo de a.

Su 0-ésimo coeficiente de Fourier es

$$h_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{ix})\,\mathrm{d}x.$$

Luego

$$G(a) = \exp(h_0) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{ix})\,\mathrm{d}x\right).$$

$G(a)$ es la media geométrica de a

Denotamos por h algún logaritmo continuo de a.

Su 0-ésimo coeficiente de Fourier es

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{ix})\,\mathrm{d}x.$$

Luego

$$G(a) = \exp(h_0) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{ix})\,\mathrm{d}x\right).$$

Esta expresión se conoce como la media geométrica de la función a.

Teorema fuerte de Szegő en términos analíticos

Sea a un polinomio de Laurent tal que a tiene $p+q$ raíces diferentes, con

$$0 \notin a(\mathbb{T}) \quad y \quad \operatorname{wind}(a) = 0.$$

Sea h un logaritmo continuo de a y sean h_k los coeficientes de Fourier de h. Pongamos

$$G(a) = \exp(h_0), \qquad E(a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k h_k h_{-k}\right).$$

Entonces existe un $u \in (0,1)$ tal que

$$\det T_n(a) = (G(a))^n E(a)(1 + O(u^n)), \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty.$$