Polinomios de Hermite

Calderón Ortiz Kevin

23 de marzo de 2026

Índice

1. Fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite

El propósito de esta sección es verificar (a partir de la fórmula de Rodrigues) que los *polinomios de Hermite* forman un conjunto ortogonal respecto a la función de peso e^{-x^2}. Para ello, demostraremos algunos resultados preliminares.

Definición 1.1 (n-ésimo polinomio de Hermite)**.** Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos el *n-ésimo polinomio de Hermite* como

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{1}$$

Ejemplo 1.1. *Hallemos los primeros dos polinomios de Hermite.*

$$\begin{aligned} H_0(x) &= (-1)^0 e^{x^2} \frac{d^0}{dx^0} e^{-x^2} \\ &= e^{x^2} e^{-x^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1(x) &= (-1)^1 e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} \\ &= -e^{x^2} e^{-x^2}(-2x) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Proposición 1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x). \tag{2}$$

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y desarrollemos a $H'_{n-1}(x)$:

$$\begin{aligned} H'_{n-1}(x) &= \frac{d}{dx}\left((-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\right) \\ H'_{n-1}(x) &= \frac{d}{dx}\left((-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\left(2xe^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} + e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right) \\ &= 2x(-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} - (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \\ &= 2xH_{n-1}(x) - H_n(x), \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado.

□

Corolario 1.1. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $H_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Demostración. Es consecuencia de un razonamiento por inducción sobre n.

□

Proposición 1.2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x). \tag{3}$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. Si $n = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= H_1'(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left((-1)^1 e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right) \\ &= -\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}(-2xe^{-x^2})\right) \\ &= \frac{d}{dx}2x \\ &= 2 \\ &= 2nH_0(x). \end{aligned}$$

Supongamos que el resultado es cierto para $k < n$ y verifiquemos que también es cierto para n. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_n'(x) &\overset{(2)}{=} (2xH_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x))' \\ &\overset{\text{h.i.}}{=} (2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x))' \\ &= 2H_{n-1}(x) + 2xH_{n-1}'(x) - 2(n-1)H_{n-2}'(x) \\ &\overset{\text{h.i.}}{=} 2H_{n-1}(x) + 2x(2(n-1)H_{n-2}(x)) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \\ &= 2H_{n-1}(x)) + 2(n-1)(2xH_{n-2}(x) - H_{n-2}'(x)) \\ &\overset{(2)}{=} 2H_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-1}(x) \\ &= 2nH_{n-1}(x), \end{aligned}$$

en donde *h.i.* indica el uso de la hipótesis de inducción. Por tanto, se tiene lo deseado. □

Corolario 1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\frac{d^n}{dx^n} H_n(x) = 2^n n!. \tag{4}$$

Demostración. Es consecuencia de un razonamiento por inducción sobre n y la proposición anterior. □

Corolario 1.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \tag{5}$$

Demostración. Usando las dos proposiciones anteriores, hallamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &\overset{(2)}{=} 2xH_n(x) - H_n'(x) \\ &\overset{(3)}{=} 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.2. *Hallemos los polinomios H_2, H_3 y H_4.*

$$\begin{aligned} H_2(x) &= 2xH_1(x) - 2(1)H_0(x) \\ &= 2x(2x) - 2(1) \\ &= 4x^2 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3(x) &= 2xH_2(x) - 2(2)H_1(x) \\ &= 2x(4x^2 - 2) - 4(2x) \\ &= 8x^3 - 12x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4(x) &= 2xH_3(x) - 2(3)H_2(x) \\ &= 2x(8x^3 - 12x) - 6(4x^2 - 2) \\ &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

Lema 1.1. Sea f una función polinomial con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx = \int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}(x) f'(x) dx.$$

Más aún, si $\deg(f) < n$, entonces la integral anterior vale 0.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Al usar integración por partes, se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left((-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) f(x) dx \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \\
&= (-1)^n \left(\cancelto{0}{\left[f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx \right) \\
&= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx \\
&= (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f'(x) e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f'(x) (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}(x) f'(x) dx.
\end{aligned}
$$

Lo antes mencionado respecto al grado de f es consecuencia de aplicar el razonamiento anterior $deg(f) + 1$ veces.

$\square$

Teorema 1.1 (Propiedad ortogonal de los polinomios de Hermite.)**.** Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = n! 2^n \sqrt{\pi} \delta_{nm}, \tag{6}
$$

donde δ_{nm} se define como:

$$
\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}
$$

Es decir, los polinomios de Hermite forman un conjunto ortogonal respecto a la función de peso e^{-x^2}.

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que $n \neq m$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $n < m$. Por el lema anterior y el hecho de que

$deg(H_n) = n < m = def(H_m)$, se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0$$
$$= n!2^n\sqrt{\pi}\delta_{nm}.$$

Ahora, supongamos que $n = m$. Por el lema anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}(x) H_n'(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-2}(x) H_n''(x) dx \\
&\vdots \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-n}(x) H_n^{(n)}(x) dx \\
&\overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 2^n n! dx,
\end{aligned}$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 2^n n! dx \\
&= 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\
&= 2^n n! \sqrt{\pi} \\
&= 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm},
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

2. Función generadora de los polinomios de Hermite

El propósito de esta sección es encontrar la función generadora de los polinomios de Hermite, para ello nos auxiliaremos del siguiente lema.

Lema 2.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $u \mapsto e^{-u^2}$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $u \in \mathbb{R}$, se verifica

$$f^{(n)}(u) = (-1)^n e^{-u^2} H_n(u).$$

Demostración. Es consecuencia de despejar $f^{(n)}(u)$ en la fórmula de Rodrigues para $H_n(u)$. $\square$

Teorema 2.1 (Función generadora de los polinomios de Hermite)**.** Se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2}. \tag{7}$$

Demostración. Consideremos la función $f \circ g$, donde f se define como en lema anterior y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x - t$ para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario y fijo. Dado que la función $f \circ g$ es analítica, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$(f \circ g)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f \circ g)^n(0)}{n!} t^n,$$

donde, por el lema anterior :

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^{(n)}(0) &= (-1)^n f^{(n)}(g(0)), \\
&= (-1)^n f^{(n)}(x) \\
&= (-1)^n e^{-x^2} H_n(x),
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned}
e^{-(x-t)^2} &= (f \circ g)(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-x^2} H_n(x)}{n!} t^n \\
&= e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n(x)}{n!} t^n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
e^{2x-t^2} &= e^{x^2} e^{-(x-t)^2} \\
&= e^{x^2} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n(x)}{n!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n(x)}{n!} t^n.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.2 (Forma explícita de los polinomios de Hermite.)**.** *Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el n-ésimo polinomio de Hermite se escribe como:*

$$H_n(x) = n! \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p (2x)^{n-2p}}{(n-2p)!p!} \tag{8}$$

Demostración. Por un lado, reescrbiendo el miembro izquierdo de (7) y usando la expansión en serie de Taylor obtenemos que,

$$\begin{aligned} e^{2xt-t^2} &= e^{2xt}e^{-t^2} \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2xt)^m}{m!} \right) \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^p}{p!} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2x)^m t^{m+2p}}{m!p!}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que las series involucradas son absolutamente convergentes. Ahora, consideremos el cambio de índices $n = m + 2p$. Notemos que $0 \leq m = n - 2p$, por lo que $p \leq \frac{n}{2}$, en consecuencia, $p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Así:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2x)^m t^{m+2p}}{m!p!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p (2x)^{n-2p} t^n}{(n-2p)!p!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p (2x)^{n-2p} n!}{(n-2p)!p!} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Comparando esta última expresión con la ecuación (7), concluimos:

$$H_n(x) = n! \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p (2x)^{n-2p}}{(n-2p)!p!},$$

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

□

Corolario 2.1. *Paridad de los polinomios de Hermite* Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $H_n(x)$ es una función par si n lo es y, $H_n(x)$ es una función impar si n lo es.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la expresión explicíta de los polinomios de Hermite, pues la paridad de $n-2p$ en la ecuación (8) es la misma que la de n. $\square$

Ahora, procedemos a verificar la siguiente identidad, la cual utilizaremos para probar un resultado más interesante.

Proposición 2.1. *Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\alpha \in (0,1)$. Definimos*

$$\mathcal{I}_n(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} H_n(\alpha x)\, dx.$$

Entonces,

$$\mathcal{I}_n(y) = \sqrt{\pi}\,(1-\alpha^2)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\alpha y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$

.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n.
Caso $n=0$: Como $H_0(x)=1$, se tiene

$$\mathcal{I}_0(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

También,

$$\sqrt{\pi}(1-\alpha^2)^0 H_0\left(\frac{\alpha y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Caso $n=1$: Puesto que $H_1(x)=2x$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} \cdot 2\alpha x\, dx \\
&= 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} x\, dx \\
&= 2\alpha \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} (x-y)\, dx + y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} dx \right) \\
&= 2\alpha y \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\sqrt{\pi}(1-\alpha^2)^{1/2} \cdot 2 \cdot \frac{\alpha y}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 2\alpha y \sqrt{\pi}.$$

Paso inductivo: Supongamos que el resultado es válido para n y $n-1$, demostraremos para $n+1$. Utilizando la relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

hallamos lo siguiente:

$$\mathcal{I}_{n+1}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} \left(2\alpha x H_n(\alpha x) - 2nH_{n-1}(\alpha x)\right) dx.$$

Así, separando términos adecuadamente:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} x H_n(\alpha x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} \left((x-y)+y\right) H_n(\alpha x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} (x-y) H_n(\alpha x)\, dx + y\mathcal{I}_n(y).\end{aligned}$$

Derivando $\mathcal{I}_n$ respecto a y, obtenemos:

$$\frac{d}{dy}\mathcal{I}_n(y) = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} (x-y) H_n(\alpha x)\, dx.$$

Derivando el miembro derecho de la identidad a demostrar:

$$\frac{d}{dy}\left[\sqrt{\pi}(1-\alpha^2)^{n/2} H_n\left(\frac{\alpha y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right] = \sqrt{\pi}(1-\alpha^2)^{(n-1)/2}\alpha H_n'\left(\frac{\alpha y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$

Dado que $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$, resulta:

$$\int e^{-(x-y)^2}(x-y)H_n(\alpha x)\, dx = n\alpha\sqrt{\pi}(1-\alpha^2)^{(n-1)/2} H_{n-1}\left(\frac{\alpha y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$

Sustituyendo lo anterior en la expresión para $\mathcal{I}_{n+1}(y)$, concluimos:

$$\mathcal{I}_{n+1}(y) = \sqrt{\pi}(1-\alpha^2)^{(n+1)/2} H_{n+1}\left(\frac{\alpha y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right),$$

como se quería demostrar. $\square$

Lema 2.2. *Sea k un kernel y definamos $\tilde{k}(x,y) \coloneqq p^{\frac{1}{2}}(x)k(x,y)p^{\frac{1}{2}}(y)$, donde $p(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces el problema de eigenvalores*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}(x,y)\tilde{\varphi}_i(x)dx = \tilde{\lambda}\tilde{\varphi}_i(x)$$

tiene los mismos valores propios que

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x,y)p(x)\varphi_i(x) = \lambda\varphi_i(x),$$

y que los valores propios son los mismos y las funciones propias están relacionadas por la identidad

$$\tilde{\varphi}_i(x) = p^{\frac{1}{2}}(x)\varphi_i(x)$$

Demostración. Asumamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x,y)p(x)\varphi_i(x)dx = \lambda_i\varphi_i(x),$$

y defínase $\tilde{\varphi}_i(x) \coloneqq p^{\frac{1}{2}}(x)\varphi_i(x)$, entonces podemos reescribir la integral anterior como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x,y)p(x)\frac{\tilde{\varphi}_i(x)}{p^{\frac{1}{2}}(x)}dx = \lambda_i\frac{\tilde{\varphi}_i(y)}{p^{\frac{1}{2}}(y)},$$

lo cual implica:

$$p^{\frac{1}{2}}(y)\int_{-\infty}^{\infty} k(x,y)\tilde{\varphi}_i(x)p^{\frac{1}{2}}(x)dx = \lambda_i\tilde{\varphi}_i(y),$$

así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}(x,y)\tilde{\varphi}_i(x)dx = \lambda_i\tilde{\varphi}_i(y),$$

de donde se sigue que $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i$ y, por tanto, se tiene el resultado. □

Teorema 2.3. *Sean $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1-\alpha^2$. En la notación del lema anterior definamos $k(x,y) \coloneqq e^{-\beta(x-y)^2}$, $\tilde{k}(x,y) \coloneqq e^{-\frac{(\beta-1)^2}{2}x^2}e^{-\beta(x-y)^2}e^{-\frac{(\beta-1)^2}{2}y^2}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*