INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Servicio Social

Apuntes de los temas:

Espacio de Bergman,
Transformada de Berezin,
Transformación de Möbius

Roberto Moisés Barrera Castelán

Proyecto de investigación:
IPN-SIP 20130633 (Propiedades espectrales de matrices y operadores de Toeplitz)

Director del proyecto de investigación:
Egor Maximenko

MÉXICO, D.F.
Enero 2014

Índice

1. Reporte global

Justificación

El presente trabajo apoya al proyecto IPN-SIP 20130633 (Propiedades espectrales de matrices y operadores de Toeplitz) dirigido por el Dr. Egor Maximenko, profesor de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. Uno de los objetivos de este proyecto el estudio de los operadores radiales de Toeplitz en el espacio de Bergman del disco unitario, por esta razón, mi trabajo consistió en estudiar con profundidad y escribir apuntes sobre los temas: Espacios de Hilbert con núcleo reproductor (EHNR), Espacio de Bergman, Transformada de Berezin y Transformaciones de Möbius, apoyando de esa manera al aprendizaje y la investigación.

Objetivos

1. Estudiar los espacios de Hilbert con núcleo reproductor.
2. Estudiar del espacio de Bergman (sin peso).
3. Estudiar la Transformada de Berezin de operadores y de funciones.
4. Estudiar brevemente las transformaciones de Möbius del plano complejo extendido y decribir todos los biholomorfismos del disco en el disco.

Marco Teórico

En matemáticas, el concepto de espacio de Hilbert es una generalización del concepto de espacio euclídeo. Esta generalización permite que nociones y técnicas algebraicas y geométricas aplicables a espacios de dimensión dos y tres se extiendan a espacios de dimensión arbitraria, incluyendo a espacios de dimensión infinita. Ejemplos de tales nociones y técnicas son la de ángulo entre vectores, ortogonalidad de vectores, el teorema de Pitágoras, proyección ortogonal, distancia entre vectores y convergencia de una sucesión. El nombre dado a estos espacios es en honor al matemático David Hilbert quien los utilizó en su estudio de las ecuaciones integrales.

Más formalmente, se define como un espacio de producto interno que es completo con respecto a la norma vectorial definida por ese producto. Los espacios de Hilbert sirven para clarificar y para generalizar el concepto de series de Fourier, ciertas transformaciones lineales tales como la transformación de Fourier, y son de importancia crucial en la formulación matemática de la mecánica cuántica. Por ejemplo, en mecánica cuántica, una función de onda es una forma de representar el estado físico de un sistema de partículas. Usualmente es una función compleja, cuadrado integrable y univaluada de las coordenadas espaciales de cada una de las partículas. Las propiedades mencionadas de la función de onda permiten interpretarla como una función cuadrado integrable. La ecuación de Schrödinger proporciona una ecuación determinista para explicar la evolución temporal de la función de onda y, por tanto, del estado físico del sistema.

Existen espacios de Hilbert de funciones con una característica muy especial, a saber, que todas las funciones en él, pueden ser reproducidas puntualmente por una sola función de dos variables llamada *núcleo reproductor*. De entre ellos, estudiamos el *espacio de Bergman*. Este espacio es un objeto muy atractivo para la investigación por la simplicidad de su definición, consiste de funciones analíticas cuadrado integrables, es decir está en la intersección de dos importantes ramas de las Matemáticas: Análisis Funcional y Análisis Complejo. Posee un núcleo reproductor cuya importancia radica en que con su ayuda, pueden generalizarse diferentes teoremas de funciones de una variable compleja a funciones de varias variables complejas tales como el lema de Schwarz, teoremas de distorsión y mapeos conformes (Teorema del mapeo de Riemann). En el caso de una variable casi todos los mapeos conformes importantes pueden expresarse en términos de este núcleo.

En espacios con núcleo reproductor surge de manera muy natural una función llamada *transformada de Berezin*, la cual asigna a cada operador una función. Es de sumo interés el estudio de las propiedades de un operador, pero debido a su naturaleza tan abstracta, tal tarea resulta muy difícil. Afortunadamente la trasformada de Berezin tiene una propiedad fundamental: es inyectiva, ello significa que al asignar a cada operador una transformada de Berezin, toda la información de ese operador queda condensada en ésta función, y es mucho más fácil estudiar una función que un operador. Se sabe que la transformada de Berezin de un operador de Toeplitz con símbolo de generador una función acotada, es igual precisamente a la transformada de Berezin su símbolo, es decir, es la transformada de Berezin de una función. Por ésta razón estudiamos de manera muy breve la trnasformada de Berezin de funciones.

Otro concepto que tratamos es el de las *transformaciones de Möbius*. Por ejemplo, cualquier biholomorfismo (biyección holomorfa) del plano complejo extendido se describe por medio de ellas. En particular, cualquier biholomorfismo del disco unitario del plano complejo se representa por medio de una clase especial de transformaciones de Möbius. Por otro lado, en vez de analizar una función en un punto arbitrario del disco unitario, basta con analizar en cero su composición con una transformación de Möbius. Son también una herramienta muy útil en cambios de variable, además la transformada de Berezin se puede expresar haciebdo uso de ellas.

Desarrollo

Se escribieron apuntes para desarrollar los temas planteados en los objetivos. El trabajo final consta de seis capítulos con ejemplos y ejercicios a desarrollar. En el capítulo 1 se introduce al estudio del los espacios de Hilbert con núcleo reproductor. El tratamiento matemático de ésta seción es meramente informativo, y comienza presentando un resultado fundamental en el Análisis Funcional: el *teorema de representación de Riesz-Frechét* y su consecuencia, el *teorema del operador adjunto*. El capítulo 2 está dedicado al estudio del espacio de Bergman y se dividió en tres partes: su base, su núcleo y su proyección. El estudio de la transformada de Berezin de operadores y su propiedad inyectiva se presenta en el capítulo 3. En el capítulo 4 se estudia una aplicación a operadores de Toeplitz con símbolo generador una función acotada en el disco unitario. Un breve tratamiento de las transformaciones de Möbius se presenta en los capítulos 5 y 6. En el capítulo cinco se estudian las transformaciones del plano complejo extendido y el seis los biholomorfismos del disco.

Conclusiones

Durante el servicio social tuve la oportunidad de estudiar temas muy interesantes de Análisis Funcional y Análisis Complejo, asi como de redactar textos matemáticos, explicar ideas abstractas por escrito, proponer ejercicios y dar sugerencias para resolverlos con el objetivo de ayudar a la comunidad interesada en el tema. Cabe mencionar que los temas tratados en los apuntes tienen de 5000 a 15,000 artículos de investigación dedicados a su estudio en todo el mundo. En México, existen grupos de investigadores que estudian estos temas: Dr. Enrique Ramírez de Arellano (CINVESTAV), Dr. Nikolay Vasilesky (CINVESTAV), Dr. Sergei Grudsky (CINVESTAV), Dra. Maribel Loaiza Leyva (CINVESTAV), Dr. R. Michael Porter (CINVESTAV), Dr. Eduardo Santillán Zerón (CINVESTAV), Dr. Mykhaylo Shapiro Fishman (ESFM-IPN), Dra. María Elena Luna Elizarrarás (ESFM-IPN), Dr. Egor Maximenko (ESFM-IPN), Dr. Luis Manuel Tovar Sánchez (ESFM-IPN), Dr. Lino Feliciano Reséndis O. (ESFM-IPN), Dr. Francisco Marcos López (Instituto de Matemáticas UNAM), Dr. Guillermo Garro Gómez (Instituto de Matemáticas UNAM), por mencionar algunos. Escribir textos en LaTeX fue otra experiencia grata para mí. Estos apuntes están publicados en la página del director del proyecto, la cual tiene alrededor de 4000 visitas mensuales: `http://esfm.egormaximenko.com/students/Barrera_Castelan_2014_social_service_es.pdf`

2. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Introducción

Se sabe que el núcleo reproductor fue utilizado por primera vez a principios del siglo veinte por S. Zaremba en su trabajo [15] sobre problemas de valor en la frontera para funciones armónicas y biarmónicas en 1907, siendo el primero que introdujo, en un caso particular, el núcleo correspondiente a una clase de funciones, y enunció su propiedad de reproducción. Sin embargo no desarrolló ninguna teoría ni dió un nombre particular a los núcleos que introdujo.

En 1909, J. Mercer [9] examinó las funciones que satisfacen la propiedad de reproducción en la teoría de ecuaciones integrales, nombrando estas funciones como *núcleos positivos definidos*. Mostró asímismo que estos núcleos positivos definidos tienen buenas propiedades de entre todos los núcleos continuos de ecuaciones integrales.

Desafortunadamente, estos resultados no fueron investigados durante mucho tiempo. Posteriormente, la idea reapareció en las disertaciones de tres matemáticos alemanes G. Szegö (1921) [13], S. Bergman (1922) [2] y S. Bochner (1922) [6]. En particular, S. Bergman introdujo núcleos reproductores en una y varias variables para la clase de funciones armónicas y la clase de funciones analíticas y las nombró *funciones kernel.*

E. H. Moore, en [10] y [11], examinó los núcleos definidos positivos en su análisis general bajo el nombre de matriz Hermitiana positiva. Posteriormente la teoría de núcleos reproductores fue sistematizada completamente por N. Aronszajn [1]. en lo que hasta ahora se conoce como el tratado más famoso sobre el tema.

La idea original de Zaremba de aplicar núcleos a la solución de problemas con valores en la frontera fue desarollada por S. Bergman y M. Schiffer. En estas investigaciones, los núcleos probaron ser una herramienta muy poderosa para resolver problemas de ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico con valores en la frontera. Más aún, por medio de la aplicación de núcleos a mapeos conformes de dominios múltiplemente conexos, se obtuvieron hermosos y elegantes resultados por S. Bergman y M. Schiffer.

Representación de funcionales lineales continuos en espacios de Hilbert.

Uno de los resultados claves para nuestro estudio es:

Teorema 2.1. *Teorema de representación de Riesz-Fréchet. Sea H un espacio de Hilbert y sea F un funcional lineal continuo en H. Entonces existe un único $y \in H$ tal que*

$$\forall x \in H \qquad F(x) = \langle x, y \rangle.$$

Más aún $\|y\| = \|F\|$.

Demostración. Si F es el funcional lineal cero el Teorema es válido poniendo $y = 0$. Supongamos entonces que F no es el funcional lineal cero y sea

$$M := KerF = \{x \in H : \ F(x) = 0\};$$

M es un subespacio propio cerrado de H pues F es continuo y $M = F^{-1}(0)$. Entonces $H = M \oplus M^{\perp}$. Como F no es el funcional cero $M^{\perp} \neq 0$. Sea $z \in M^{\perp}$, $z \neq 0$ tal que $F(z) = 1$ ($z = \frac{w}{F(w)}$ con $w \neq 0$). Para todo $x \in H$ se tiene

$$x = (x - F(x)z) + F(x)z$$

donde $x - F(x)z \in M$,y $F(x)z \in M^{\perp}$ pues $z \in M^{\perp}$. Multiplicamos ambos lados de la igualdad (**??**) por z y usando el hecho de que $z \perp M$ se obtiene

$$\begin{aligned}\langle x, z \rangle &= \langle (x - F(x)z) + F(x)z, z \rangle \\ &= \langle x - F(x)z), z \rangle + \langle F(x)z, z \rangle = \langle F(x)z, z \rangle \\ &= F(x)\|z\|^2\end{aligned}$$

Para toda $x \in H$. Sea $y = \frac{z}{\|x\|^2}$, entonces

$$\langle x, y \rangle = \frac{\langle x, z \rangle}{\|x\|^2} = F(x), \quad \forall x \in H.$$

Supóngase que existen $y, y' \in H$ tales que $\langle x, y \rangle = F(x) = \langle x, y' \rangle \quad \forall x \in H$. Entonces

$$0 = \langle x, y \rangle - \langle x, y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, -y' \rangle = \langle x, y - y' \rangle, \forall x \in H$$

$\Rightarrow \quad y - y' = 0$, por lo tanto $y = y'$. Esto termina de probar la primera afirmación del Teorema. Si $\|x\| \leq 1$, entonces por la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|F(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\| \leq \|y\|$$

y por lo tanto $\|F\| \leq \|y\|$. Por otro lado, $x = \frac{y}{\|y\|}$ es un vector unitario $\Rightarrow \quad \|F\| \geq |F(x)| = \frac{|\langle y, y \rangle|}{\|y\|} = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$. Así $\|F\| = \|y\|$. $\square$

El siguiente resultado es muy fácil de demostrar y se deja como ejercicio.

Ejercicio 2.2. Proposición. Todo vector y que pertenece a un espacio con producto interno X define un funcional lineal acotado $f_y\colon X \to \mathbb{K}$, $x \to \langle x, y\rangle$, tal que $\|f_y\| = \|y\|$. En particular, $f_y \in X^* \quad \forall y \in X$, donde X^* es el dual de X.

Ahora demostraremos con un ejemplo, que el teorema de representación de Riez no se cumple en espacios con producto interno arbitrarios.

Ejercicio 2.3. Sea $X := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \colon supp[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \{n \in \mathbb{N}\colon a_n \neq 0\} < \infty\} \subset (\ell^2, \|\|_2)$, donde $\mathbb{N} = 0, 1, \dots$ Demuestre que X no es un espacio de Hilbert.

Hint: Demuestre que la ley del paralelogramo no se cumple en ℓ^∞ por lo que X no es un espacio con producto interno cuya norma inducida es $\|\|_\infty$; i.e., es imposible definir un producto interno sobre ℓ^∞ tal que $\langle a, a\rangle = \|a\|_\infty^2, \forall a \in \ell^\infty$.

Ejemplo 2.4. Considere X como en el ejercicio anterior. Entonces para $a = (a_n)_{n\geq 1} \in X$ vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|a\|_2\frac{\pi}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

y por lo tanto $f\colon X \to \mathbb{K}$ definido por

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$$

define un funcional lineal acotado sobre X. Ahora supongamos que el teorema de representación de Riez se cumple para X. Entonces existe un único elemento $b \in X$ tal que

$$f(a) = \langle a, b\rangle, \forall a \in X.$$

Pero para $e_i = (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}} \in X$ y $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, tenemos

$$\langle e_j, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\delta_{ij}\overline{b_i} = \overline{b_j} = f(e_j) = \frac{1}{j}$$

es decir,

$$b_j = \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

lo que es una contradicción pues $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \notin X$.

Consecuencias del Teorema de representación de Riesz-Fréchet

Denótese por $\mathcal{B}(H)$ el espacio de todos los operadores acotados en un espacio de Hilbert H. Se puede demostrar, que $\mathcal{B}(H)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma de operadores.

Teorema 2.5. *Teorema del Operador Adjunto Sea $T \in \mathcal{B}(H)$. Existe un único operador $T^* \in \mathcal{B}(H)$ tal que,*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

para todo $x, y \in H$.

Demostración. Sea $y \in H$.La relación $x \to \langle T(x), y\rangle \in \mathcal{B}(H)$. Por las propiedades del producto interno, es claramente lineal. Sea $x \in H$ con $\|x\| \leq 1$, como $T \in B(H)$ y por la Desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$|\langle T(x), y\rangle| \leq \|T\|\|y\| \leq M\|X\|\|y\| \leq M\|y\|,$$

donde M es una cota para $\|T\|$. Luego es acotado y por lo tanto continuo.Por el Teorema de Riez-Fréchet existe un único $z \in H$ tal que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, z\rangle, \forall x \in H$$

Defínase $T^*(y) = z$. Entonces T^* es una función de H en H y se satisface la condición (4). Además para todas $x, y, v \in H$ y $\lambda, \mu \in K$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\lambda y + \mu v)\rangle &= \langle T(x), \lambda y + \mu v\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle T(x), y)\rangle + \overline{\mu}\langle T(x), v\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle x, T^*(y)\rangle + \overline{\mu}\langle x, T^*(v)\rangle \\ &= \langle x, \lambda T^*(y) + \mu T^*(v)\rangle,\end{aligned}$$

por lo tanto $T^*(\lambda y + \mu v) = \lambda T^*(y) + \mu T^*(v)$ y así T^* es lineal.

Para ver que T^* es acotado obsérvese que para toda $y \in H$, por la Desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\|T^*(y)\|^2 &= \langle T^*(y), T^*(y)\rangle \\ &= \langle T(T^*(y)), y)\rangle \\ &\leq \|T(T^*(y))\|\|y\| \leq \|T\|\|T^*(y)\|\|y\|.\end{aligned}$$

Si $\|T^*(y)\| < 0$ se obtiene que $\|T^*(y)\| \leq \|T\|\|y\|$, y esta desigualdad también se tiene si $\|T^*(y)\| = 0$. Se sigue que T^* es un operador lineal acotado y $\|T^*\| \leq \|T\|$. Finalmente se mostrará que T^* es único. Si $T^*, P \in \mathcal{B}(H)$ son tales que satisfacen la igualdad (2), entonces

$$\langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, P(y)\rangle, \quad \forall x, y \in H \Longrightarrow T^*(y) = P(y), \quad \forall y \in H$$

Por lo tanto $T^* = P$. El operador T^* es llamado el adjunto de T. □

Proposición 2.6. *El mapeo $T \to T^*$ tiene las siguientes propiedades:*

(a) $(aS + bT)^* = \overline{a}S^* + \overline{b}T^*$ *para todo* $a, b \in K$ *y* $S, T \in \mathcal{B}(H)$.

(b) $(ST)^* = T^*S^*$ *para todo* $S, T \in \mathcal{B}(H)$.

(c) $(T^*)^* = T$ *para todo* $T \in \mathcal{B}(H)$.

(d) $\|T^*\| = \|T\|$ *para todo* $T \in \mathcal{B}(H)$.

Demostración. Únicamente se demuestra el inciso a).

a): Sean $a, b \in K$, $S, T \in \mathcal{B}(H)$ y $x, y \in H$

$$\begin{aligned}
\langle x, (aS + bT(y))^*\rangle &= \langle (aS + bT)(x), y\rangle \\
&= a\langle S(x), y\rangle + b\langle T(x), y\rangle \\
&= a\langle x, S^*(y)\rangle + b\langle x, T^*(y)\rangle \\
&= \langle x, \overline{a}S^*(y)\rangle + \langle x, \overline{b}T^*(y)\rangle \\
&= \langle x, (\overline{a}S^* + \overline{b}T^*)(y)\rangle
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.7. Demuestre los incisos b), c) y d) de la proposición anterior.

Ahora damos un ejemplo de un operador lineal acotado en un espacio con producto interno que no tiene un adjunto.

Ejemplo 2.8. Sean X y $f\colon X \to \mathbb{K}$ como en el ejemplo anterior, con:

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Usando este funcional lineal acotado, tenemos

$$f(e_j) = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora definamos
$$T(a_n) := (f(a), 0, 0, ...).$$
Claramente este operador es lineal, acotado y tal que
$$Te_n = (n^{-1}, 0, 0, ...) \quad n \in \mathbb{N}$$
de modo que
$$\langle Te_n, e_1 \rangle = \frac{1}{n}.$$
Supongamos que $T^* \in \mathcal{B}(H)$ existe. Entonces
$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \forall x, y \in X$$
por lo que
$$\langle e_n, T^* e_1 \rangle = \langle Te_n, e_1 \rangle = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}.$$
Por eso, si hacemos $T^* e_1 = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la última ecuación daría
$$\overline{b_n} = \langle e_n, T^* e_1 \rangle = \frac{1}{n},$$
es decir,
$$b_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Pero entonces $T^* e_1 = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \notin X$ y por lo tanto debemos concluir que T^* no existe.

Teorema de existencia y unicidad del núcleo reproductor.

Definición 2.9. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones sobre un conjunto X. Sean $f, g \in \mathcal{H}$, se denota por $\langle f, g \rangle$ al producto interno de funciones y por $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ a la norma en $\mathcal{H}$. La función complejo valuada $K : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ denotada por
$$K(x, y) = K_y(x)$$
es llamada un *núcleo (o kernel) reproductor* de $\mathcal{H}$ si satisface:

(i) Para toda $y \in X$, $K_y(x) = K(x, y)$ como función de x pertenece a $\mathcal{H}$.

(ii) *La propiedad de reproducción*: para toda $x \in X$ y toda $f \in \mathcal{H}$,
$$f(x) = \langle f, K_x \rangle$$

Ejemplo 2.10. Sea $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Para un vector $x = (x_1, ..., x_2) \in \mathbb{R}^n$ puede definirse una función (manteniendo la notación) $x : I_n \to \mathbb{R}$ por la regla $x(i) = x_i$, para toda $i \in I_n$. Consideremos entonces $H^2_{I_n}$ como el espacio de todas estas funciones (observamos que el rango de toda función en $H^2_{I_n}$ está contenido en $\mathbb{R}^n$). Entonces en$H^2_{I_n}$ introducimos el producto punto habitual en $\mathbb{R}^n$, esto es, si $x(i) = x_i$ y $y(i) = y_i$ para x, y en $\mathbb{R}^n$, entonces,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

El espacio $H^2_{I_n}$ es un espacio de Hilbert. Ahora bien, si $K_n : I_n \times I_n \to \mathbb{R}^n$ tiene la regla $K_n(i, j) = \delta_{ij}$, entonces K_n es el núcleo reproductor para $\mathbb{R}^n$. La verificación de este hecho es inmediata.

Ejemplo 2.11. Ahora, si $l_2 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ y $H^2_{I_\infty}$ es la clase de funciones $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas de manera análoga al ejemplo anterior, con producto interior $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, entonces $H^2_{I_\infty}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor $K(i, j) = \delta_{i,j}$.

Ejemplo 2.12. En general, sea H un espacio de Hilbert separable sobre el campo escalar complejo, y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H, si $x \in H$, entonces existe una única representación $x = \sum_i \alpha_i e_i$. Definimos la función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ con la regla $x(i) = \alpha_i$. Sea F la clase formada por todas las funciones de la forma anterior. Para x, y en F introducimos el producto interior

$$\langle x, y\rangle_F = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i \langle e_i, e_i\rangle_H = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i.$$

Entonces la función $K : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, cuya regla es $K(i, j) = \delta_{i,j}$, es el núcleo reproductor de F.

Ejemplo 2.13. Sea t un número real positivo. Definimos la clase H_t de trayectorias continuas $q : [0, t] \to \mathbb{R}$, tal que $q(t) = 0$ y $q'(s)$ existe casi dondequiera y es cuadrado integrable (en el sentido de Riemann). Entonces la expresión

$$\langle q_1, q_2\rangle = \int_0^t q_1'(s) q_2'(s)\, ds,$$

para cualesquiera q_1 y q_2 en H_t, define un producto interior. En efecto, para q_1 y q_2 en H_t, la integral $\int_0^t q_1'(s)q_2'(s)ds$ es un número real, las propiedades de linealidad y simetría se siguen inmediatamente de este hecho. Ahora, es claro que $q = 0 \in H_t$, entonces si $q = 0$, $\langle q, q\rangle = 0$. Por otra parte, si $\langle q, q\rangle = 0$, i.e. $\int_0^t [q'(s)]^2\, ds = 0$, se sigue que q' es cero casi dondequiera, luego q es constante en $[0, t]$ (por continuidad), pero $q(t) = 0$, entonces $q(s) = 0$ para todo $s \in [0, t]$.

Tenemos que el espacio H_t posee núcleo reproductor. En efecto la función $K : [0, t] \times [0, t] \to \mathbb{R}$ dada por $K(s_1, s_2) = t - \max\{s_1, s_2\}$ define el núcleo reproductivo para H_t.

En primer lugar, es claro que $K(\cdot, s_2)$ pertenece a H_t, para cada $s_2 \in [0,t]$. Ahora, sea $s_2 \in [0,t]$, entonces $\dfrac{d}{ds}K(s,s_2) = 0$ si $s < s_2$ y $\dfrac{d}{ds}K(s,s_2) = -1$ si $s_2 < s$, de tal forma que, para $q \in H_t$, tenemos,

$$\begin{aligned} \langle q(\cdot), K(\cdot, s_2)\rangle &= \int_0^t q'(s)\frac{d}{ds}K(s,s_2)\,ds \\ &= -\int_{s_2}^t q'(s)\,ds \\ &= q(s_2). \end{aligned}$$

Ejercicio 2.14. Sea

$$K(s,t) = \min(s,t) + \frac{s\overline{k}}{1-\overline{k}} + \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2, \quad s,t \in [0,1].$$

Demuestre que

$$\frac{d}{ds}K(s,t) = \begin{cases} 1 + \frac{\overline{k}}{1+\overline{k}} & 0 \le s < t, \\ \frac{\overline{k}}{1+\overline{k}} & t < s \le 1. \end{cases}$$

Ejemplo 2.15 (Itratescu, [**?**])**.** Sea F el espacio de todas las funciones continuas complejas sobre $[0,1]$, cuya derivada existe casi dondequiera y tal que

i) $\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt < \infty$, para toda $f \in F$.

ii) Existe $k \neq 1$ en $\mathbb{C}$ tal que $f(0) = kf(1)$, para toda $f \in F$.

Bajo la suma y el producto escalar habituales, F es una clase lineal. Mientras que para cualesquiera funciones f y g en F, la expresión

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f'(t)\overline{g'}(t)\,ds$$

define un producto interior en F. En efecto, es evidente que $\int_0^1 f'(t)\overline{g'}(t)dt$ existe y es un número complejo. Las propiedades de linealidad y antisimetría se siguen de forma inmediata. Es claro además que si $f = 0$ entonces $\langle f,f\rangle = 0$. Y por otra parte, si $\langle f,f\rangle = 0$, i.e. $\int_0^1 |f'(t)|^2 dt = 0$, entonces (por continuidad) $f'(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, la función f es pues una constante, digamos c. Por hipótesis, $c = f(0) = kf(1) = kc$, de aquí que $c = 0$, pues $k \neq 1$.

Ahora bien para cualquier para s,t en $[0,1]$, la función

$$K(s,t) = \min(s,t) + \frac{s\overline{k}}{1-\overline{k}} + \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2$$

del ejercicion anteriores el núcleo reproductor de la clase F. Efectivamente, si $t \in [0,1]$ tenemos que,

$$K(0,t) = \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2,$$

mientras que

$$\begin{aligned} kK(1,t) &= k\left(t + \frac{\overline{k}}{1-\overline{k}} + \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2\right) \\ &= kt\left(1 + \frac{k}{1-k}\right) + \frac{|k|^2}{1-\overline{k}}\left(1 + \frac{k}{1-k}\right) \\ &= \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2, \end{aligned}$$

por tanto $K(0,t) = kK(1,t)$. Luego, se sigue por el ejercicio anterior que para $f \in F$ y $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \langle f(\cdot), K(\cdot,t)\rangle &= \int_0^1 f'(s)\overline{\frac{d}{ds}}K(s,t)\,ds \\ &= \left(1 + \frac{k}{1-k}\right)\int_0^t f'(s)ds + \frac{k}{1-k}\int_t^1 f'(s)\,ds \\ &= \frac{1}{1-k}(f(t) - f(0)) + \frac{k}{1-k}(f(1) - f(t)) \\ &= \frac{1}{1-k}(f(t) - kf(1) + kf(1) - kf(t)) \\ &= f(t), \end{aligned}$$

por tanto K es el núcleo reproductor de la clase F.

Proposición 2.16. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones sobre un conjunto X y $K_x : X \longrightarrow \mathbb{C}$ un núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}$. Entonces, para $x \in X$*

$$\|K_x\|^2 = K(x,x)$$

.

Demostración. La hipótesis implica que al aplicar la propiedad de reproducción a la función K_x en y se obtiene, para $x, y \in X$

$$K_x(y) = \langle K_x, K_y\rangle,$$

y por (i)

$$K(y,x) = \langle K_x, K_y \rangle.$$

Por las relaciones de arriba, para todo $x \in X$ se obtiene

$$\|K_x\| = \langle K_x, K_x \rangle^{\frac{1}{2}} = K(x,x)^{\frac{1}{2}}$$

□

Definición 2.17. Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones sobre un conjunto X es llamado un *Espacio de Hilbert con núcleo reproductor* (a menudo abreviado *EHNR*) si existe un núcleo reproductor K de $\mathcal{H}$.

Teorema 2.18. *Si un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones sobre un conjunto X admite un núcleo reproductor K(x,y), entonces este está determinado de manera única por el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sea $K(x,y)$ un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$. Suponga que existe otro núcleo $K'(x,y)$ reproductor de $\mathcal{H}$. Entonces por la proposición anterior, se tiene que para todo $y \in X$,

$$\begin{aligned}
\|K_y - K'_y\|^2 &= \langle K_y - K'_y, K_y - K'_y \rangle \\
&= \langle K_y - K'_y, K_y \rangle - \langle K_y - K'_y, K' \rangle \\
&= (K_y - K'_y)(y) - (K_y - K'_y)(y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $K_y = K'_y$, esto es, $K_y(x) = K'_y(x) \quad \forall x \in X$. Esto quiere decir que para todos $x, y \in X$

$$K(x,y) = K'(x,y)$$

□

El siguiente resultado da una forma muy útil para saber cuándo un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones sobre un conjunto X admite un núcleo reproductor.

Teorema 2.19 (Criterio de *EHNR*: Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductor)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones sobre un conjunto X. Entonces existe un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ sí y sólo si para todo $x \in X$, el* funcional de evaluación $\mathrm{Ev} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *definido mediante la regla*

$$(\mathrm{Ev}\, f)(x) := f(x)$$

es lineal y acotado i.e., $\mathrm{Ev} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{H}$ admite un núcleo reproductor K. Es evidente por su definición, que Ev es lineal. Ahora, por la propiedad de reproducción y la desigualdad de Schwarz para el producto escalar, se tiene que para toda $x \in X$,

$$|f(x)| = |\langle f, K_x \rangle| \leq \|f\| \, \|K_x\| = \|f\| \langle K_x, K_x \rangle^{\frac{1}{2}} = \|f\| K(x,x)^{\frac{1}{2}}$$

Esto es, $\mathrm{Ev} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ahora suponga que para todo $x \in X$ $\mathrm{Ev} : f \in \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es lineal y acotado, esto es, $\mathrm{Ev} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces por el Teorema de representación de Riez-Frechét, para todo $x \in X$, existe una única función $g_x \in \mathcal{H}$, tal que

$$(\mathrm{Ev}\ f)(x) = f(x) = \langle f, g_x \rangle.$$

Luego al poner K_x en lugar de g_x, entonces se sigue que para todo $y \in X$,

$$K_x(y) = g_x(y).$$

Por lo que K es un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ $\square$

Definición 2.20. Sea X un conjunto arbitrario y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ un núcleo sobre X. El núcleo es llamado *Hermitiano* si para todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ y cualesquiera números complejos $a_1, \ldots, a_n$ se cumple

$$\sum_{i,j}^{n} \overline{a_j} a_i K(x_j, x_i) \in \mathbb{R}$$

y K es llamado *positivo definido* si

$$\sum_{i,j}^{n} \overline{a_j} a_i K(x_j, x_i) > 0.$$

Equivalentemente, la última desigualdad significa que para toda familia de números complejos de soporte finito $\{a_x\}_{x \in X}$ tenemos

$$\sum_{x \in X}^{n} \overline{a_j} a_i K(x_j, x_i) > 0.$$

A menudo se denota esto brevemente como $[K(x,y)] > 0$ en X, o equivalentemente, diremos que K es una *matriz positiva definida en el sentido de E. H. Moore.*

Teorema 2.21. *El núcleo reproductor $K(x,y)$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones sobre un conjunto X es una matriz positiva definida en el sentido de E. H. Moore.*

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned}
0 &\leq \| \sum_{i=1}^{n} a_i K_{x_i} \|^2 \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i K_{x_i}, \sum_{j=1}^{n} a_j K_{x_j} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{a_j} \langle K_{x_j}, K_{x_i} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{a_j} \langle K(x_i, x_j).
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.22. Propiedades del núcleo reproductor Sea $\mathcal{H}$ un *EHNR* y sea K su núcleo reproductor. Entonces para todos $x, y \in X$, K satisface:

(a) $K(x,x) > 0$.

(b) $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

(c) $|K(x,x)|^2 \leq K(x,x)K(y,y)$, (Desigualdad de Schwarz).

(d) Sea $x_0 \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) $K(x_0, x_0) = 0$.
- (ii) $K(x, x_0) = 0 \quad \forall x \in X$.
- (iii) $f(x_0) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}$.

El siguiente teorema puede pensarse como el inverso del Teorema 4.

Teorema 2.23. *Para todo núcleo positivo definido $K(x,y)$ en X, existe un único espacio de Hilbert $\mathcal{H}_K$ de funciones en X, que admite el núcleo reproductor $K(x,y)$.*

Demostración. Se denota por $\mathcal{H}_0$ el espacio de funciones f en X tal que existe un conjunto finito de puntos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de X y números complejos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i K(x, y_i),$$

para todo $x \in X$. Sea $g(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \mu_j K(\cdot, x_j) \in \mathcal{H}_0$. Se define ahora el producto interno de las funciones f y g en $\mathcal{H}_0$ como

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\overline{\mu_j}\langle K(\cdot, y_j), K(\cdot, x_i)\rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\overline{\mu_j}K(x_i, y_j).$$

Entonces,

$$\langle f, K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i\langle K(\cdot, x_i), K(\cdot, x)\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i K(x, x_i) = f(x)$$

para toda $x \in X$, esto es, $\mathcal{H}_0$ admite la propiedad de reproducción. Esto implica que la definición anterior de producto interno *no* depende de las representaciones de las funciones f y g en $\mathcal{H}_0$. Más aún, es fácil ver que $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}_0}$ es lineal en la primera variable y Hermitiana. Como K es positiva definida se sigue que $\langle f, f\rangle_{\mathcal{H}_0} > 0$ para toda $f \in \mathcal{H}_0$, por eso se tiene la desigualdad de Schwarz para $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}_0}$. Además, si $\langle f, f\rangle_{\mathcal{H}_0} = 0$, entonces $\|f\| = 0$ y así, por la propiedad de reproducción anterior, se sigue que para todo $x \in X$,

$$|f(x)| \leq \|f\|\|K(\cdot, x)\| = 0,$$

lo que implica que $f = 0$. Por lo tanto, $(\mathcal{H}_0, \langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}_0})$ es un espacio pre-Hilbert Ahora se

denota por $\mathcal{H}$, la completación abstracta de $\mathcal{H}_0$ a un espacio de Hilbert. Se mostrará que $\mathcal{H}$ tiene una única representación como un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Considere cualquier sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}_0$. Entonces, para toda $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &= |\langle f_m, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0} - \langle f_n, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0}| \\ &= |\langle f_m - f_n, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0}| \\ &=\leq \|f_m - f_n\|_{\mathcal{H}_0} K(x, x)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De manera que, existe la función $f : X \to \mathbb{C}$ tal que para toda $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Más aún, se tiene que

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_0}$$

y que para cualesquiera sucesiones de Cauchy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}_0$, al denotar por f y g respectivamente, los correspondientes límites puntuales de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene que

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{n,m\to\infty} \langle f_n, g_m\rangle_{\mathcal{H}_0}.$$

Nótese que de la expresión del límite puntual se obtiene una representación concreta de $\mathcal{H}$ como un espacio de funciones sobre X. Además, K tiene la propiedad de reproducción con respecto a $\mathcal{H}$. En efecto, sea $f \in \mathcal{H}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ fuertemente. Entonces para todo $x \in X$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle \lim_{n\to\infty} f_n, K_x \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle f, K_x\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Resta probar la unicidad del espacio $\mathcal{H}$. Suponga que $\mathcal{H}_1$ es otro espacio de Hilbert con el mismo espacio núcleo reproductor K. Por definición, para todo $x \in X$, $K_x \in \mathcal{H}_1$ y entonces se tiene $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1$. También, para todas $f, g \in \mathcal{H}_0$, en virtud de la propiedad de reproducción se sigue que,

$$\langle f, g\rangle_{\ mathcalH_0} = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_1} \ldots (*)$$

Si $f \in \mathcal{H}_1$ es tal que $0 = \langle f, K_x\rangle_{\mathcal{H}_1} = f(x)$ para toda $x \in X$, entonces $f = 0$. Por lo tanto, la familia $\{K_x : x \in X\}$ es total en $\mathcal{H}_1$. Por lo tanto para toda $f \in \mathcal{H}_1$, puede tomarse una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}_0$. tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Por lo tanto, la utíma expresión $(*)$ es válida en $\mathcal{H}_0$. Ahora, como se tiene $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1$ y $(*)$, se obtiene $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1$. También, de la construcción de $\mathcal{H}$, se obtiene $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$. Así se tiene $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$.

Finalmente, se debe mostrar que los productos internos y las normas son iguales $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_1$. Considérense cualesquiera $f, g \in \mathcal{H}_1$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}_0$ que convergen a f y g respectivamente. Entonces

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_1} = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Y por eso las normas en $\mathcal{H}$ y en $\mathcal{H}_1$ son iguales. □

Proposición 2.24. *Sea F un espacio de funciones con producto interior definido. Si F posee núcleo reproductor entonces cualquier subespacio cerrado F_1 de F también posee núcleo reproductor.*

Demostración. Sea K el núcleo reproductor. de F. Consideremos un subespacio cerrado F_1 de F. Si $y \in E$, donde E es el conjunto donde están definidas las funciones de F, entonces la correspondencia lineal $f \mapsto f(y)$ es acotada para toda $f \in F$, en particular para $f \in F_1$. Entonces, según el teorema de existencia, existe el núcleo reproductor K_1 correspondiente a la clase F_1. □

Ejemplo 2.25. Este ejemplo fue presentado en el trabajo de Zaremba. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Sea H_D^2 la clase de todas las funciones complejas sobre D armónicas y cuadrado integrables (respecto a x e y) sobre $\bar{D}$. El espacio H_D^2, con producto

$$\langle f, g\rangle = \int\int_{\overline{D}} f(z)\overline{g(z)}dxdy, \qquad z = x + iy,$$

con $f, g \in H^2_D$ es un subespacio cerrado de L^2_D.

Sea $z_0 \in D$, probaremos que el funcional $f \mapsto f(z_0)$ es continuo. Tomemos pues f en H^2_D. Ahora, como D es abierto, existe $r > 0$ tal que el disco $\overline{D}_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset D$, y dado que f es una función armónica,

$$f(z_0) = \frac{1}{(\pi r)^2} \int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} f(z) dxdy,$$

de donde,

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &\leq \frac{1}{(\pi r)^2} \int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} |f(z)| dxdy \\
&\leq \frac{1}{(\pi r)^2} \left(\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} |f(z)|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} 1 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(\pi r)^2} \|f\| (\pi r^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^{3/2} r} \|f\|,
\end{aligned}$$

y la constante $1/\pi^{3/2} r$ solo depende de z_0. El funcional $f \mapsto f(z_0)$ es entonces acotado y por ello continuo, luego, existe el núcleo K para H^2_D.

Ejemplo 2.26. Sea D el disco unitario sobre $\mathbb{C}$. Consideremos el espacio F de todas las funciones complejas analíticas sobre D y cuadrado integrables. En F el producto interior queda definido con la expresión habitual

$$\langle f, g \rangle = \int\int_D f(z) \overline{g(z)} dxdy, \qquad z = x + iy.$$

Entonces F es un subespacio cerrado de L^2_D. En efecto, sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en F convergente a una función $f \in L^2_D$, y z_0 un elemento en D, entonces existe un número $r > 0$ tal que el disco $\overline{D}_r(z_0) = \{z : |z_0 - z| \leq r\} \subset D$, y por hipótesis toda función en F es también armónica, luego para toda n, m naturales,

$$\begin{aligned}
|f_n(z_0) - f_m(z_0)| &\leq \frac{1}{(\pi r)^2} \int\int_{\overline{D}_r(z_0)} |f_n(z) - f_m(z)| dxdy \\
&\leq \frac{1}{(\pi r)^2} \int\int_D |f_n(z) - f_m(z)| dxdy
\end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Cauchy, tenemos

$$|f_n(z_0) - f_m(z_0)| \leq \frac{1}{r \pi^{3/2}} \|f_n - f_m\|,$$

luego, $\{f_n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número $g(z_0)$. La función g definida en D por $g(z) = \lim f_n(z)$ es analítica (por ser límite de funciones analíticas), entonces $g = f$ casi seguramente, con lo cual F es cerrado.

Bergman fue quien descubrió que esta clase tiene núcleo reproductor. En efecto, para $z \in \overline{D}$ y $f \in F$ puede probarse de manera análoga al ejemplo anterior que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{r\pi^{3/2}}\|f\|,$$

donde r solo depende de z, entonces el funcional $f \mapsto f(z)$ es continuo, luego F posee núcleo reproductor.

Definimos ahora la clase F de funciones complejas f sobre D analíticas tales que

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

existe y es finito. Este espacio es conocido como el espacio H^2 de Hardy.
Ejercicio 2.27. Demuestre que la expresión

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\overline{g}(re^{it})dt$$

define un producto interno en F.
Ejercicio 2.28. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\int_{0}^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\frac{d\theta}{\pi} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n. \end{cases}$$

Lema 2.29. *Sea f una función en el espacio de Hardy. Entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

Demostración. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ la representación en serie de potencias de f. Entonces

$$
\begin{aligned}
|f(z)|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_k z^k \overline{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\,\overline{z^n} \\
&= \sum_{k,n=0}^{\infty} c_k \overline{c_n} z^k \overline{z^n}.
\end{aligned}
$$

Al hacer $z = re^{i\theta}$, se tiene $z^k = r^k e^{ik\theta}$, luego

$$
\begin{aligned}
|f(re^{i\theta})|^2 &= \sum_{k,n=0}^{\infty} c_k \overline{c_n} r^k e^{ik\theta} r^n e^{-in\theta} \\
&= \sum_{k,n=0}^{\infty} c_k \overline{c_n} r^{k+n} e^{ik\theta} e^{i(k-n)\theta}.
\end{aligned}
$$

Así, por el ejercicio anterior y el hecho de que el desarrollo en serie de potencias de f convege uniformemente en compactos del disco se sigue que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k,n=0}^{\infty} c_k \overline{c_n} r^{k+n} e^{ik\theta} e^{i(k-n)\theta} \, d\theta \\
&= \sum_{k,n=0}^{\infty} c_k \overline{c_n} r^{k+n} \frac{1}{2\pi} \int e^{i(k-n)\theta} \, d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.30. Sea D el disco unitario. Considere z en D, si $f \in H^2$ entonces, por ser analítica, $f(z)$ tiene una representación en serie de potencias de la forma

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,
$$

y si $|z| \leq r < 1$, entonces

$$|f(z)|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |z|^{2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n},$$

pero por el lema anterior

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

por tanto

$$|f(z)| \leq \|f\|.$$

Luego el funcional $f \mapsto f(z)$ es acotado para cada $z \in D$, entonces F posee núcleo reproductor.

3. El espacio de Bergman del disco unitario

Sea X un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Definimos el espacio de funciones cuadrado-integrables, a veces simplemente denotado por $L_2(X, d\mu)$ o $L^2(X, d\mu)$, como la familia de funciones $f : X \to \mathbb{C}$, $\mathcal{F}$-medibles, tal que $|f|^2$ es Lebesgue-integrable. En símbolos,

$$L^2(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \quad : \quad \int\limits_X |f|^2 d\mu < \infty \right\}.$$

Ejercicio 3.1. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Demuestre que $L_2(X, d\mu)$ es un espacio vectorial lineal.

Definición 3.2 (Producto interno en L^2)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Para $f, g \in L^2(X, d\mu)$ definimos el producto

$$\langle f, g \rangle = \iint\limits_X f(z)\overline{g(z)}\, dx\, dy. \tag{1}$$

Este espacio es un espacio de Hilbert con respecto a la norma inducida por el producto interno definido arriba.

Ejercicio 3.3 (La norma en L^2)**.** Demuestre que la función $\|\cdot\|_2 : L_2 \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\|f\|_2 = \left(\int\limits_X |f|^2\, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

determina una norma para el espacio $L_2(X, d\mu)$.

En este trabajo estudiaremos las funciones en el disco unitario. Enunciamos el siguiente resultado conocido, su demostración es rutinaria y puede consultarse en libros de Análisis Funcional.

Teorema 3.4. *Sea $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ el disco unitario en el plano complejo y $\mu :=$ medida de Lebesgue en el plano. Entonces $L^2(\mathbb{D}, d\mu)$ es un espacio de Hilbert.*

Definición 3.5. Sea $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ el espacio vectorial que consiste de todas las funciones analíticas $f :\to \mathbb{D}$. Denotaremos por $\mathcal{A}^2(\mathbb{D}, d\mu)$ al subespacio de $L^2(\mathbb{D}, d\mu)$ que consiste de aquellas $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ que son cuadrado integrables sobre $\mathbb{D}$:

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\, dx\, dy < \infty, \quad (z = x + iy).$$

Esto es $\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) = \mathcal{A}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$, o sea

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) := \{f \in L^2(\mathbb{D}, \mu) \colon \; f \textit{ analítica}\}$$

El siguiente resultado permitirá establecer la completez de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D}, d\mu)$.
Lema 3.6. *Dado un conjunto compacto $K \subset \mathbb{D}$, existe una constante C_K,que depende de K, tal que*

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_{A^2(\mathbb{D})}, \quad \forall f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}, d\mu) \tag{2}$$

Demostración. Denotemos por $D_{z,r}$ el disco abierto centrado en z y que tiene radio $r < 1$. Para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ fija pero arbitraria y todo $D_{z,r} \subset \mathbb{D}$ consideramos la serie de Taylor

$$f(\zeta) = f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w-z)^n, \qquad w \in D_{z,r}$$

Ésta serie converge uniformemente sobre cualquier disco cerrado $\overline{D_0} = \overline{D_{z,r_0}}$, donde $r_0 < r$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int\limits_{\overline{D_0}} f(w)\, d\mu(w) &= f(z) \int\limits_{\overline{D_0}} d\mu(w) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_{\overline{D_0}} (w-z)^n \, d\mu(w) \\ &= \pi r_0^2 f(z).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \frac{1}{\pi r_0^2} \left| \int\limits_{\mathbb{D}} f(w)\chi_{\overline{D_0}}(w)\, d\mu(w) \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi r_0^2} \left(\int\limits_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 \, d\mu(w) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\overline{D_0}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0} \|f\|_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})},\end{aligned}$$

donde $\chi_{\overline{D_0}}(w)$ es la función característica de $\overline{D_0}$. Observe que entonces los puntos de K definen una cubierta abierta y como K es compacto el teorema termina cuando cubrimos el compacto K por un número finito de tales discos. $\square$

Ejercicio 3.7. Demuestre la igualdad

$$f(z) \int\limits_{\overline{D_0}} d\mu(w) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_{\overline{D_0}} (w-z)^n \, d\mu(w) = \pi r_0^2 f(z)$$

del lema anterior.

Ejercicio 3.8. Sea $z \in \mathbb{D}$, y $r = \operatorname{dist}(z, \partial\mathbb{D})$. Entonces, para cada $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ se tiene,

$$|f^k(z)| \leq \frac{k!(k+2)}{2\sqrt{\pi}r^{k+1}}\|f\|, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

Hint: Tome $0 < r < 1$ y considere el disco $|w - z| \leq r$, utilize coordenadas polares para integrar $f(z + \rho e^{i\theta})$ sobre este, donde obviamente $f(z + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\rho^n e^{in\theta}$.

Como todo subconjunto cerrado de un espacio completo es también completo, basta probar que $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es cerrado en $L^2(\mathbb{D})$ para probar que es un espacio de Hilbert.
Corolario 3.9. *El espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy de funciones analíticas de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ que converge en $L^2(\mathbb{D})$ a cierta función $f \in L^2(\mathbb{D})$. Para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{D}$ tenemos por el lema 3.6:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq C_K\|f_n - f_m\|_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}.$$

Luego la sucesión (f_n) converge uniformemente en todo subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ a la función f. Por lo tanto f es analítica en $\mathbb{D}$ y pertenece a $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ $\square$

Base del espacio de Bergman

Antes de demostrar el siguiente Teorema, consideremos la noción de base ortonormal en espacios de Hilbert.

Para comenzar, recordemos espacios de Hilbert finito-dimensionales tales como el espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$ y el espacio unitario $\mathbb{C}^n$. Para tales espacios, tenemos la noción de base ortonormal; por ejemplo, la base ortonormal usual $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para $\mathbb{R}^n$. Ahora, si definimos

$$E_k = (e_1, e_2, ..., e_k)$$

entonces, $\forall k \quad (1 \leq k \leq n)$, E_k es un conjunto ortonormal. Note que E_1 se puede extender a E_2, E_2 a E_3 y finalmente E_{k-1} a E_k. Sin embargo, *no* es posible extender E_n aniadiéndole cualquier otro vector unitario, digamos (e), de modo que el conjunto resultante

$$E = (e_1, e_2, ..., e_n, e)$$

sea una base ortonormal para el espacio $\mathbb{R}^n$. En este sentido el conjunto E_n es llamado una base ortonormal *completa* o *total* para $\mathbb{R}^n$. Así, para cualquier espacio con producto interno de dimensión finita, la idea de base ortonormal completa es clara.

Sin embargo, el concepto de base para un espacio de dimensión infinita es un poco problemático porque toda base ortonormal de este espacio contendrá un conjunto infinito de vectores que puede ser a lo sumo numerable o no numerable. Se vuelve obvia entonces la necesidad de generalizar la noción de base ortonormal completa a espacios de Hilbert arbitrarios

Enunciemos pues de manera precisa, el significado de conjunto/sistema ortonormal maximal en un espacio con producto interno, donde $dim X = \infty$.

Definición 3.10. Sea $E = (e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un conjunto/sistema ortonormal en un espacio con producto interno y de dimensión infinita X. Decimos que el sistema E es *ortonormal maximal* (o *completo*) en X, si *no* existe un vector unitario e en X que sea ortogonal a cada e_α; i.e., E es maximal para X, si el único elemento de X que es ortogonal a todo $e_\alpha, \alpha \in \Lambda$ es el vector cero:

$$\langle e, e_\alpha\rangle = 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda \quad \Longrightarrow \quad e = 0.$$

Teorema 3.11. *Sea* $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$ *el disco abierto con centro en el orígen y radio R. Entonces una base ortonormal para* $\mathcal{A}^2(D_R)$ *está dada por* $u_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} R^{-n} z^{n-1}$ *para n=1,2,...*

Demostración. Para probar la ortonormalidad, notemos primero que si f y g son funciones holomorfas en $\mathbb{D}$, y si $0 < r < R$, entonces una aplicación de la fórmula de Green junto con las Ecuaciones de Cauchy-Riemann nos da

$$\iint\limits_{D_r} f(z)\overline{g'(z)}dxdy = \frac{1}{2i}\oint\limits_{C_r} f(z)\overline{g(z)}dz \tag{3}$$

donde C_r es la frontera de D_r. Si definimos

$$v_n(z) = \frac{R^{-n}}{\sqrt{n\pi}} z^n \qquad (n = 1, 2, ...),$$

entonces $v_n'(z) = u_n(z)$, luego de (3) y utilizando coordenadas polares en la penúltima integral se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle u_m, u_n \rangle &= \iint\limits_{D_R} u_m(z)\overline{u_n(z)}dxdy \\
&= \iint\limits_{D_R} u_m\overline{v_n'(z)}dxdy \\
&= \lim_{r\to R}\iint\limits_{D_r} u_m(z)\overline{v_n'(z)}dxdy \\
&= \lim_{r\to R}\frac{1}{2i}\oint\limits_{C_r} u_m(z)\overline{u_n(z)}dz \\
&= \frac{R^{-m-n}}{2\pi i}\sqrt{\frac{m}{n}}\lim_{r\to R}\oint\limits_{C_r} z^{m-1}\overline{z^n}dz \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m = n \\ 0 & \text{si} \quad m \neq n \end{cases}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal.

Para ver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base, probemos que si $f \in \mathcal{A}^2(D_R)$ y si $\langle f, u_n\rangle = 0$ para toda n, entonces $f(z) = 0$. Los coeficientes de Fourier de $f(z)$ están dados por

$$\langle f, u_n\rangle = \sqrt{\frac{n}{\pi}}R^{-n}\iint\limits_{D_R} f(z)\overline{z^{n-1}}dxdy \qquad = \sqrt{\frac{n}{\pi}}R^{-n}\lim_{r\to R}\iint\limits_{D_r} f(z)\overline{z^{n-1}}dxdy$$

como $|z| = r$, entonces $\overline{z} = r^2z^{-1}$, y usando (3) llegamos a

$$\langle f, u_n\rangle = \sqrt{\frac{n}{\pi}}R^{-n}\lim_{r\to R}\frac{r^{2n}}{2\pi i}\oint\limits_{C_r}\frac{f(z)}{z^n}dz.$$

Pero si $f(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n + ..., |z| < R$, es el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de $z = 0$, entonces de la fórmula de Cauchy obtenemos

$$a_n = \frac{f^{(n)}}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \qquad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{4}$$

Combinando esto último con (4), vemos que

$$\langle f, u_n\rangle = \sqrt{\frac{n}{\pi}}R^{-n}\lim_{r\to R}r^{2n}a_{n-1} = \sqrt{\frac{n}{\pi}}R^na_{n-1} \quad (n = 1, 2, ...)$$

Luego, si $\langle f, u_n\rangle = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $a_0 = a_1 = a_2 = ... = 0$, es decir $f(z) = 0$. $\square$

Ejercicio 3.12. En la demostración del teorema anterior, realize la integración en coordenadas polares mencionada y verifique la ortogonalidad.
Ejercicio 3.13. Redefina la base dada en el teorema anterior para $n \in \mathbb{N}$ desde cero, y haga la misma demostración con $R = 1$.
Lema 3.14. *El espacio*

$$H^{\infty}(\mathbb{D}) := \left\{ f : f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}), \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty \right\},$$

es denso en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, entonces,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n(z), \quad e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$$

Por otra parte como $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ se tiene también que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Igualando las expresiones para f obtenemos que

$$a_n = \langle f, e_n \rangle \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \iff \langle f, e_n \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n$$

Ahora por la identidad de Parseval

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}.$$

Luego, se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi |a_n|^2}{n+1} = \|f\|^2_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$$

De aquí se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi |a_n|^2}{n+1} = \|f\|^2_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})} < \infty$$

Definamos ahora $f_n = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$, entonces, nuevamente por la identidad de Parseval se sigue que al calcular la norma de $f - f_n$, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\|f - f_n\|^2_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})} &= \|f - \sum_{m=0}^{n} a_m z^m\|^2_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})} \\
&= \|\sum_{m+1}^{\infty} a_m z^m\|^2_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})} \\
&= \|\sum_{n=m+1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n\|^2_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})} \\
&= \sum_{n=m+1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\pi|a_n|^2}{n+1} < \epsilon
\end{aligned}
$$

$\square$

Núcleo de Bergman

Recordamos el **Teorema del mapeo de Riemann**:

> Si $\Omega \subset \mathbb{D}$ es no vacío, abierto y simplemente conexo,
> entonces existe un biholomorfismo f que mapea
> Ω sobre el disco unitario $\mathbb{D}$.
> Además, si $\zeta \in \Omega$, entonces existe una única tal f
> que satisface:
>
> $f(\zeta) = 0$, y $f'(\zeta) > 0$

Las demostraciones usuales de este resultado dan muy poca información sobre la transformación f que lleva a cabo el mapeo. Como ésta es a menudo de gran importancia en las aplicaciones, representaciones analíticas de tales transformaciones han sido buscadas con asiduidad. Los esfuerzos iniciales en ésta dirección se enfocaron para el caso de dominios de forma geométrica sencilla, e,g., regiones poligonales. Más tarde a finales de los anios cuarenta Stefan Bergman en su trabajo: **"The kernel function and conformal**

mapping", Bergman Stefan, Amer. Math. Soc. (1950)

desarrolló la teoría de **núcleos reproductores** así como un método muy útil para construir f.

Esta teoría ha sido aplicada con éxito a una gran cantidad de dominios y ha tenido muchas otras aplicaciones. Cabe mencionar que este método requiere solamente de un conocimiento mínimo de la teoría de funciones de variable compleja, ateniéndose principalmente a los resultados elementales sobre espacios de Hilbert.

Observación 3.15 (El espacio de Bergman es un EHNR)**.** Por el Lema 3.6, se sigue que para cualquier punto fijo $z \in \mathbb{C}$ el funcional de evaluación $\mathrm{Ev}_z : f \to f(z)$ es lineal y acotado, pues este será un caso particular de la fórmula (2) con $z = K$. Entonces por el Teorema de representación de Riesz existe un único elemento $K_z \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ tal que $\mathrm{Ev}_z = \langle \cdot, K_z \rangle$; esto es

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle \tag{5}$$

La función $K_{\mathbb{D}}(z,w) := K_z(w)$ se llama *función núcleo reproductor de* $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ para el espacio de Bergman, porque la fórmula (5) reproduce a toda función en este espacio.

Ejercicio 3.16 (forma integral de la propiedad reproductiva.)**.** Demuestre, usando la definición del producto interno en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D}, d\mu)$, que

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_{\mathbb{D}}(z,w)}\, d\mu(w) \quad \forall f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}, d\mu). \tag{6}$$

Hint: Sea $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Primero demuestre que el lado derecho está bien definido utilizando la desigualdad de Schwarz y alguna propiedad del núcleo reproductor dada en el capítulo anterior. Luego, considere una base ortonormal de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, use el Lema 3.14 y finalmente la propiedad de reproducción (5).

Lema 3.17. *La función núcleo de Bergman es hemitiana simétrica*

$$K_{\mathbb{D}}(z,w) = \overline{K_{\mathbb{D}}(w,z)}.$$

Sea $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *cualquier base ortonormal en* $A^2(\mathbb{D})$*. Entonces*

$$K_{\mathbb{D}}(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} e_k(z)\overline{e_k(w)}$$

Demostración. La función $k_w(z) = \overline{K_{\mathbb{D}}(w,z)}$ pertenece a $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, de modo que por la propiedad de reproducción (5) se observa que

$$\begin{aligned}\overline{K_{\mathbb{D}}(w,z)} &= \int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}}(z,\tau)\overline{K_{\mathbb{D}}(w,\tau)}\, d\mu(\tau) = \overline{\int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}}(w,\tau)\overline{K_{\mathbb{D}}(z,\tau)}\, d\mu(\tau)} \\ &= \overline{\overline{K_{\mathbb{D}}(z,w)}} = K_{\mathbb{D}}(z,w)\end{aligned}$$

Sea ahora e_k una base ortonormal en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Entonces la función analítica $k_w(z) = \overline{K_{\mathbb{D}}(w,z)} = K_{\mathbb{D}}(z,w)$ admite el desarrollo

$$K_{\mathbb{D}}(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_k(w)e_k(z),$$

donde los coeficientes $c_k(w)$ están dados por

$$\begin{aligned} c_k(w) = \langle k_w(z), e_k(z) \rangle &= \int\limits_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}}(z,w)\overline{e_k(z)}\, d\mu(z) \\ &= \overline{\int\limits_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}}(w,z) e_k(z)\, d\mu(z)} = \overline{e}_k(w) \end{aligned}$$

Esto es,

$$K_{\mathbb{D}}(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(z)\overline{e_k(w)}.$$

Otro método (para la última igualdad): Como f es analítica en el disco, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k(z)$. Ahora bien, si ésta igualdad es cierta, entonces debe satisfacer la propiedad de reproducción, verifiquemos este hecho,

$$\langle f, K_z \rangle = \Big\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k(z), \sum_{k=0}^{\infty} \overline{e_k(w)} e_k(z) \Big\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k(z) \langle e_k, e_k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k(z) = f(z).$$

Luego, por la unicidad del núcleo reproductor, se sigue que,

$$K_{\mathbb{D}}(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(z)\overline{e_k(w)} \quad \forall z, w \in \mathbb{D}.$$

□

Observación 3.18. El núcleo de Bergman *depende únicamente del dominio* y *no de la base ortonormal* particular utilizada para definirlo

Con esto tenemos el siguiente

Corolario 3.19 (Forma explícita para el núcleo de Bergman en el disco unitario)**.** *Sean $z, w \in \mathbb{D}$. Entonces,*

$$K_w(z) = K_{\mathbb{D}}(z,w) = \frac{1}{\pi(1-\overline{w}z)^2}.$$

Demostración. Tenemos $\forall z, w \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
K_w(z) = K(z,w) &= \sum_{k=0}^{\infty} e_k(z)\overline{e_k(w)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^k \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \overline{w^k} \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (n+1)(\overline{w}z)^k \\
&= \frac{1}{\pi}(1 + 2(\overline{w}z) + 3(\overline{w}z)^2 + ...) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dv}(\sum_{k=0}^{\infty} v^n), \quad v = z\overline{w} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-v)^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-\overline{w}z)^2}
\end{aligned}$$

□

Observación 3.20. Note lo que se hizo en la demostración del corolario anterior: Se utiliza el hecho de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} av^n = 1 + v + v^2 + v^3 + ... = \frac{a}{1-v}, \quad a = 1.$$

Se toma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\overline{w}z)^n = 1 + (\overline{w}z) + (\overline{w}z)^2 + (\overline{w}z)^3 + ..., \quad v = \overline{w}z$$

y

$$\frac{d}{dv}(\sum_{n=0}^{\infty} v^n) = 1 + 2v + 3v^2 + ... := S$$

Ahora,

$$S = 1 + 2v + 3v^2 + 4v^3 + 5v^4 + ...,$$

luego se multiplica por v

$$vS = v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + 5v^5 + ...$$

y restando vS de S, se obtiene

$$S(1-v) = S - vS = 1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + ... = \frac{1}{1-v}.$$

Finalmente

$$S = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^2}.$$

A continuación veremos como, utilizando el Teorema del mapeo de Riemann, es posible construir aquella función f mediante el núcleo de Bergman.

Teorema 3.21. *Sea f una transformación conforme del dominio G sobre el disco $D_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$. Entonces, una base ortonormal para $\mathcal{A}^2(G)$ está dada por*

$$w_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} R^{n-1}(f(z))^{n-1} f'(z), \quad z \in G \quad (n = 1, 2, ...).$$

Demostración. Hagamos $w = f(z) = u(z) + iv(z)$. Como

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se tiene

$$|f'(z)|^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} (f(z))^{m-1} f'(z) (\overline{f(z)})^{n-1} \overline{f'(z)} dxdy &= \iint\limits_{\Omega} (f(z))^{m-1} (\overline{f(z)})^{n-1} |f'(z)|^2 dxdy \\ &= \iint\limits_{D_R} w^{m-1} \overline{w}^{n-1} dudv,\end{aligned}$$

y por el teorema (3.11) anterior $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{A}^2(\Omega)$. Para ver que es una base ortonormal, debemos demostrar que si $h \in A^2(\Omega)$, y si $\langle h, w_n\rangle = 0 \quad (n = 1, 2, ...)$, entonces $h(z) = 0$.

Sea $g = f^{-1}$ la función inversa de f. Si $h \in \mathcal{A}^2(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} |h(z)|^2 dxdy &= \iint\limits_{\Omega} \left|\frac{h(z)}{f'(z)}\right|^2 |f'(z)|^2 dxdy \\ &= \iint\limits_{D_R} |h \circ g(w) g'(w)|^2 \, dudv < \infty,\end{aligned}$$

i.e., $(h \circ g)g' \in \mathcal{A}^2(D_R)$. Ahora, si $\langle h, w_n\rangle = 0 \quad \forall n$, entonces

$$\iint_{\Omega} h(z)\overline{w_n(z)}dxdy = \sqrt{\frac{n}{\pi}}R^{-n}\iint_{\Omega} h(x)(\overline{f(z)})^{n-1}\overline{f'(z)}dxdy$$
$$= \sqrt{\frac{n}{\pi}}R^{-n}\iint_{\Omega} \frac{h(z)}{f'(z)}(\overline{f(z)})^{n-1}|f'(z)|^2dxdy$$
$$= \sqrt{\frac{n}{\pi}}R^{-n}\iint_{D_R} h\circ g(w)g'(w)\overline{w}^{n-1}dudv = 0 \qquad (n=1,2,...)$$

y nuevamente en virtud del teorema (3.11) se sigue que $h\circ g(w)g'(w) = 0 \quad \forall w \in D_R$. Pero como $g'(w) \neq 0 \quad \forall w \in D_R$, se concluye que $h(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$. $\square$

Teorema 3.22 (Stefan Bergman)**.** *Sea Ω un dominio y considere $u \in \Omega$ fijo. Entonces la función*

$$F(z,u) = \sqrt{\frac{\pi}{K(u,u)}}\int_u^z K(\omega,u)\,d\omega, \quad \forall z \in \Omega$$

mapea Ω de manera conforme sobre el disco unitario $\{w \in \mathbb{C}\colon |w| < 1\}$, y además satisface

$$F(u,u) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}F(z,u)|_{z=u} = \sqrt{\pi K(u,u)} \tag{7}$$

Demostración. Sea $f(z)$ la transformación conforme que manda Ω sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, y que satisface

$$f(u) = 0, \qquad f'(u) > 0. \tag{8}$$

Sabemos que el núcleo de Bergman es independiente de la base ortonormal utilizada para definirlo. Luego, usamos la base dada en el teorema anterior con $R = 1$ para obtener

$$w_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}f(z)^{n-1}f'(z), \qquad z \in \Omega \quad (n=1,2,...).$$

Para esta base, de las condiciones en (8) se tiene

$$w_1(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}f'(u) > 0, \quad w_n(u) = 0 \quad (n > 1),$$

y luego

$$K(z,u) = \frac{1}{\pi}f'(z)f'(u), \quad K(u,u) = \frac{(f'(u))^2}{\pi}.$$

De esto último obtenemos

$$f'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K(u,u)}} K(z,u),$$

finalmente integrando ambos miembros de la igualdad anterior obtenemos (7) $\square$

Ejercicio 3.23. Demuestre la siguiente desigualdad

$$\left| \int_u^z K(\omega, u)\, d\omega \right| \leq \sqrt{\frac{K(u,u)}{\pi}} \quad z, u \in \Omega.$$

Teorema 3.24. *Sea la función $\omega = \alpha(z)$ un biholomorfismo (una biyección holomorfa) del dominio D sobre un dominio G. Entonces*

$$K_D(z,u) = K_G(w,\omega)\alpha'(z)\overline{\alpha'(u)}$$

Demostración. Supongamos que el sistema $f_k(w)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal del espacio $\mathcal{A}^2(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}\delta_{j,k} &= \int_G f_j(w)\overline{f_k(w)}\, d\mu(w) \\ &= \int_D f_j(\alpha(z))\overline{f_k(\alpha(z))}\alpha'(z)\overline{\alpha'(z)}\, d\mu(z)\end{aligned}$$

es decir, $e_k(z) := f_k(\alpha(z))\alpha'(z), \quad k \in \mathbb{N}$, es una base ortonormal en $\mathcal{A}^2(G)$. Por eso

$$\begin{aligned}K_D(z,u) &= \sum_{k=1}^{\infty} e_k(z)\overline{e}_k(u) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\alpha(z))\alpha'(z)\overline{f_k(\alpha(u))\alpha'(u)} \qquad = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\alpha(z))\overline{f}_k(\alpha(u))\alpha'(z)\overline{\alpha}'(u) \\ &= K_G(w,\omega)\alpha'(z)\overline{\alpha'(u)}.\end{aligned}$$

$\square$

La Proyección de Bergman

El espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{D})$, luego es un subespacio distinguido. Esto quiere decir que existe la proyección ortogonal $\mathcal{P}$ de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Esta proyección es llamada la *Proyección de Bergman*, y como muestra el siguiente Teorema, coincide con el operador integral con núcleo de Bergman.

Teorema 3.25. *La proyección de Bergman $\mathcal{P}$ tiene la representación integral*

$$(\mathcal{P}\, f)(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} K_D(z,w) f(w) d\mu(w)$$

Demostración. Para toda $f \in L^2(\mathbb{D})$ la función $(\mathcal{P}\, f)(z)$ pertenece a $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$; entonces, usando la propiedad de reproducción y el Teorema del Operador Adjunto, tenemos

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}\, f)(z) &= \langle \mathcal{P}\, f, k_z\rangle = \langle f, \mathcal{P}\, k_z\rangle = \langle f, k_z\rangle \\ &= \int\limits_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_z(w)}\, d\mu(w) = \int\limits_{\mathbb{D}} K_D(z,w) f(w)\, d\mu(w)\end{aligned}$$

□

Sea $\omega = \alpha(z)$ como antes, y sea $z = \beta(\omega)$ el mapeo inverso. Presentamos el mapeo unitario $W : L^2(G) \to L^2(D)$ definido por la regla

$$(W\varphi)(z) = \alpha'(z)\varphi[\alpha(z)];$$

su operador inverso(y adjunto) $W^{-1} = W^* : L^2(D) \to L^2(G)$ está dado por

$$(W^{-1}\varphi)(\omega) = \beta'(\omega)\varphi[\beta(\omega)].$$

Entonces presentamos el siguiente

Proposición 3.26. *Se tiene que $\mathcal{P}_D = W\,\mathcal{P}_G\,W^{-1}$*

Demostración. Usando la igualdad $\beta'(\alpha(w))\alpha'(w) = 1$ y las propiedades del núcleo de Bergman, tenemos

$$\begin{aligned}(W\,\mathcal{P}_G\,W^{-1}\varphi)(z) &= \alpha'(z)\int\limits_G K_G(\alpha(z),\omega)\beta'(\omega)\varphi(\beta(\omega))\, d\mu(\omega) \\ &= \int\limits_D K_G(\alpha(z),\alpha(w))\alpha'(z)\beta'(\alpha(w))\varphi(w)\alpha'(w)\overline{\alpha'(w)}\, d\mu(w) \\ &= \int\limits_D K_G(\alpha(z),\alpha(w))\alpha'(z)\overline{(\alpha'(w))}\varphi(w)\, d\mu(w) \\ &= \int\limits_D K_D(z,w)\varphi(w)\, d\mu(w) = (\mathcal{P}_D\,\varphi)(z)\end{aligned}$$

□

4. Transformada de Berezin y su propiedad inyectiva

Esta sección está esencialmente basada en el artículo de K. Stroethoff [12].

Transformada de Berezin de un operador lineal acotado en el espacio de Bergman sobre el disco unitario

Sea $\alpha > -1$ un número fijo y sea $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ el espacio pesado de Bergman con el peso

$$\frac{\alpha+1}{\pi}(1-|z|^2)^\alpha.$$

Estos son espacios de Hilbert de funciones con núcleo reproductor(al menos hemos verificado este hecho para el caso $\alpha = 0$, pero esto puede generalizarse fácilmente ver[16]) sobre el disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. La función núcleo reproductor normalizada del espacio $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ en un punto $z \in \mathbb{D}$ es

$$k_z(w) = \frac{(1-|z|^2)^{(2+\alpha)/2}}{(1-w\overline{z})^{2+\alpha}}.$$

Definición 4.1 (Transformada de Berezin de un operador lineal acotado)**.** Si S es un operador lineal acotado sobre $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, entonces la *transformada de Berezin* de S se define como

$$B(S)(z) = \langle Sk_z, k_z \rangle, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

La transformada de Berezin B se puede considerar como una función $\mathcal{L}(A^2_\alpha(\mathbb{D})) \to C^\infty_b(\mathbb{D})$, donde $\mathcal{L}(A^2_\alpha(\mathbb{D}))$ es el espacio de todos los operadores lineales acotados sobre $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ y $C_b(\mathbb{D})$ es el espacio de todas las funciones continuas y acotadas $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Obviamente B es lineal.

Una propiedad muy importante de la transformada de Berezin es que es inyectiva: si S es un operador tal que la función $B(S)$ es constante cero, entonces el operador S es cero. Para demostrarlo haremos uso de varios resultados auxiliares.

Lemas sobre funciones anaíticas de dos variables que se anulan en la diagonal conjugada

Ejercicio 4.2. Demuestre que en el espacio $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ las funciones

$$1, e^{2i\theta}, e^{4i\theta}, e^{6i\theta}, \ldots, e^{2Ni\theta}$$

son linealmente independientes. Indicación: calcule el Wronskiano

$$W(1, e^{2i\theta}, e^{4i\theta}, e^{6i\theta}, \ldots, e^{2Ni\theta})(\theta) = \begin{vmatrix} 1 & e^{i2\theta} & \cdots & e^{i2N\theta} \\ 0 & 2ie^{i2\theta} & \cdots & 2iNe^{iN\theta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (2i)^{N-1}e^{i2\theta} & \cdots & (Ni)^{N-1}e^{iN\theta} \end{vmatrix}.$$

Denotemos por D_r al disco en $\mathbb{C}$ con centro 0 y de radio $r \in (0, 1)$:

$$D_r \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \colon \ |z| < r\}.$$

Lema 4.3 (sobre un polinomio homogéneo de dos variables que se anula en la diagonal conjugada)**.** *Sea*

$$g_N(z, w) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n w^{N-n}$$

un polinomio homogéneo de grado N en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tal que para algún $r > 0$ y todos $z \in D_r$ se cumple la igualdad

$$g_N(z, \overline{z}) = 0. \tag{9}$$

Entonces $g_N = 0$.

Demostración. Tomemos $\rho \in (0, r)$. Ahora, poniendo $z = \rho e^{i\theta}$ en (9), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \rho^N e^{2in\theta} e^{-iN\theta} = 0, \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Multiplicamos por $e^{iN\theta}$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n e^{2in\theta} = 0, \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Como el sistema $(e^{2in\theta})_{n=0}^{N}$ es linealmente independiente por el Ejercicio 4.2, concluimos que $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, así que el polinomio g_N es cero. $\square$

Proposición 4.4. *Sea H un espacio de Hilbert de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ con núcleo reproductor $K(z,w) = K_w(z)$, entonces las funciones $K_w, w \in \mathbb{D}$, generan todo el espacio H.*

Demostración. Sea $f \in H$, y supongamos que $f \perp K_w, \forall w$, entonces por la propiedad de reproducción, a saber,

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle, \quad z \in \mathbb{D}, f \in H$$

$f(z) = 0, \quad \forall z$ por lo tanto $f = 0 \qquad \square$. □

Lema 4.5. *Sea F una función analítica en $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ tal que $F(z, \overline{z}) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{D}$. Entonces $F = 0$.*

Demostración. Sea $0 < \rho < 1$, como por hipótesis F es analítica, entonces podemos escribirla en la siguiente forma

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad en \quad D_\rho \times D_\rho,$$

donde f_n es un polinomio homogéneo de grado n en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, como en el Lema 4.3. Ahora, sea $z \in D_\rho$, $n \in \mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots$ y $-1 < t < 1$. Entonces

$$f_n(tz, t\overline{z}) = t^n f_n(z, \overline{z}).$$

Por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z, \overline{z}) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(tz, t\overline{z}) = F(tz, t\overline{z}) = 0.$$

Lo que implica que $f_n(z, \overline{z}) = 0, \quad \forall n \geq 0$, entonces por el Lema 4.3 $f_n = 0$, y por lo tanto $F = 0$. □

Resultado principal

Presentamos ahora el resultado principal de esta seción.

Teorema 4.6 (Propiedad inyectiva de la Transformada de Berezin)**.** *Sea H un espacio de Hilbert de funciones analíticas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$ del plano complejo $\mathbb{C}$ con kernel reproductor. Entonces la Transformada de Berezin es uno-a-uno.*

Demostración. Sea $T \in B(H)$ y supongamos $B(T) = 0$, esto es

$$B(T)(z) = \frac{\langle TK_z, K_z\rangle}{K(z,z)} = 0, \quad z \in \mathbb{D} \Rightarrow \langle TK_z, K_z\rangle = 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

Consideremos la función

$$F(z,w) = \langle TK_w, K_z\rangle, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

F es analítica en z y conjugada analítica en w. En efecto, sea $w \in \mathbb{D}$ fijo y consideremos la función $z \to F(z,w)$

$$F(z,w) = \int_{\mathbb{D}} (TK_w)(v)\overline{K_z(v)}dA(v) = \int_{\mathbb{D}} (TK_w)(v)K_v(z)dA(v).$$

Claramente es analítica en z. Ahora, por el Teorema del operador adjunto y las propiedades del producto interno, tenemos

$$F(z,w) = \langle K_w, T^*K_z\rangle = \overline{\langle T^*K_z, K_w\rangle},$$

Luego $\overline{F}$ es analítica en la segunda variable (recuerde que si $f \in A(\mathbb{D})$, entonces la función $z \to \overline{f(\overline{z})} \in A(\mathbb{D})$), y evidentemente, por su definición se anula en la diagonal, i.e., $\langle TK_z, K_z\rangle = 0, \quad z \in \mathbb{D}$, así, en virtud del Lema 2, se sigue que $F = 0, \quad \forall z, w \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

Por la propiedad de reproducción, podemos escribir

$$F(z,w) = (TK_w)(z), \quad \forall z, w \in \mathbb{D}.$$

Se sigue que $TK_w = 0, \quad \forall w \in \mathbb{D}$. Como los núcleos reproductores K_w generan a todo el espacio H, debemos tener $T = 0$. $\square$

Transformada de Berezin de operadores diagonales respecto a la base canónica

Definición 4.7 (función radial continua)**.** Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$. Una función continua $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ se dice *radial* si depende únicamente de $|z|$:

$$\forall z \in \mathbb{D} \qquad f(z) = f(|z|).$$

Notación 4.8. Denotemos por $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la base canónica de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, es decir, a la base normalizada de monomios que está dada por

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\Gamma(\alpha+2)}}z^n, \tag{10}$$

donde Γ denota la función gama.

Definición 4.9 (operador diagonal con respecto a la base canónica del espacio de Bergman)**.** Sea $T\colon A^2_\alpha(\mathbb{D}) \to A^2_\alpha(\mathbb{D})$ un operador lineal acotado. Se dice que T es *diagonal* con respecto a la base ortonormal de monomios, si existe una sucesión $a \in \ell^\infty$ tal que

$$T\varphi_n = a_n\varphi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 4.10. *Sea $S\colon \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ un operador lineal acotado diagonal respecto a la base ortonormal de monomios. Entonces su transformada de Berezin es una función radial.*

Demostración. Recordemos que

$$B(S)(z) = \langle Sk_z^{(\alpha)}, k_z^{(\alpha)}\rangle = \frac{\langle SK_z^{(\alpha)}, K_z^{(\alpha)}\rangle}{\|K_z\|^2}.$$

Calculemos el numerador:

$$\begin{aligned}
\langle SK_z^{(\alpha)}, K_z^{(\alpha)}\rangle &= \left\langle S\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{e_n(z)}e_n(z)\right), \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{e_n}(z)e_n(z)\right\rangle,\\
&= \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{e_n}(z)s(e_n(z)), \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{e_n}(z)e_n(z)\right\rangle,\\
&= \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{e_n}(z)a_ne_n(z), \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{e_n}(z)e_n(z)\right\rangle,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}a_ne_n(z)\overline{e_m}(z)\langle e_n, e_m\rangle,\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}a_n|e_n(z)|^2.
\end{aligned}$$

Ahora se calcula

$$\begin{aligned}
\|K_z^{(\alpha)}\|^2 = \langle K_z^{(\alpha)}, K_z^{(\alpha)}\rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{e}_n(z)e_n, \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{e}_n(z)e_n\right\rangle\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\overline{\overline{e_m}(z)}e_n(z)\langle e_n, e_m\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}e_n(z)\delta_{n,m} = \sum_{n=0}^{+\infty}|e_n(z)|^2.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\langle SK_z^{(\alpha)}, K_z^{(\alpha)}\rangle}{\|K_z\|^2} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}a_n|e_n(z)|^2}{\sum_{n=0}^{+\infty}|e_n(z)|^2}.$$

Luego por la proposición 2.16, y la fórmula 10 se sigue que

$$\begin{aligned}
B(S)(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\Gamma(\alpha+2)}|z|^{2n}\right)(1-|z|^2)^{2+\alpha},\\
&= (1-|z|^2)^{2+\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\Gamma(\alpha+2)}|z|^{2n},
\end{aligned}$$

y así$B(S)(z)$ es una función radial. □

5. La Transformada de Berezin de funciones

Este texto continua el tema “La Transformada de Berezin de operadores en el espacio de Bergman”.

Si en lugar de un operador, consideramos una función $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha), \quad \alpha > -1$, e interpretamos $\langle\cdot\rangle$, como la integral en vez del producto interno, entonces se llega a una función Bf en $\mathbb{D}$ como sigue

Definición 5.1 (Transformada de Berezin de una función)**.** Sea $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha), \quad \alpha > -1$. Entonces la transformada de Berezin $B_\alpha f$ de f está dada por

$$B_\alpha f(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w)|k_z(w)|^2 dA_\alpha(w).$$

Observación 5.2. Observación De la definición

$$B_\alpha f(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w)|k_z(w)|^2 dA_\alpha(w) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w)\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}w|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w) \qquad (1)$$

Ahora, recuerde la conocida transformación de Moebius $\varphi_z \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$:

$$\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}, \quad w \in \mathbb{D},$$

el cual es un automorfismo del disco que es igual a su propia inversa $\varphi_z^{-1} = \varphi_z$ (esto se estudiará con en la última secció de estos apuntes). En efecto, sea

$$\zeta = \varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w},$$

entonces,

$$\begin{aligned} w(1-\overline{z}\zeta) &= z-\zeta \\ &\iff w = \frac{z-\zeta}{1-\zeta\overline{z}} = \varphi_z(\zeta). \end{aligned}$$

De la observación anterior, se sigue que podemos escribir la Transformada de Berezin de f en otra forma: en términos de automorfismos del disco.

Proposición 5.3. *La Transformada de Berezin de una función $f \in L^1(\mathbb{D}, dA(z))$ está dada por*

$$B(f)(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_z)(w) dA(w), \quad z \in \mathbb{D} \qquad (2)$$

Demostración. Para toda $w \in \mathbb{D}$, tenemos (siga la observación arriba)

$$\varphi_z'(w) = \frac{-(1-\overline{z}w) + (z-w)(\overline{z})}{(1-\overline{z}w)^2} = \frac{|z|^2 - 1}{(1-w\overline{z})^2}.$$

Calculamos el Jacobiano (real) del cambio de variable $\zeta = \varphi_z(w)$:

$$\varphi_z'(w)\overline{\varphi_z'(w)} = |\overline{\varphi_z(w)}|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.$$

Por eso, $dA(w) = |\varphi_z'(w)|^2 dA(\zeta)$, se sigue entonces que

$$\int\limits_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_z)(w) dA(w) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(\zeta) |\varphi_z'(\zeta)|^2 d(\zeta).$$

De modo que por (1) para $\alpha = 0$

$$B(f)(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_z)(w) dA(w) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.$$

□

Ejercicio 5.4. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} \frac{d\theta}{\pi} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n. \end{cases}$$

Ejemplo 5.5. Existe una función integrable f tal que $|z|^2 = z\overline{z} = B(f)(z)$.

En efecto, consideremos la función

$$f(v) = 1 - \log \frac{1}{|v|^2}.$$

Primero demostremos que si $g(v) = \log \frac{1}{|v|^2}$, entonces $B(g)(z) = 1 - |z|^2$.

Primero tenemos que

$$B(\log |z|^2) = (1-|z|^2)^2 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{\log |v|^2}{|1-\overline{v}z|^4} dA(v).$$

Y como

$$\begin{aligned}\frac{1}{|1-\overline{v}z|^4} &= \frac{1}{(1-\overline{v}z)^2}\frac{1}{(1-v\overline{z})^2}\\ &= \sum_n (n+1)(\overline{v}z)^n \sum_k (k+1)(v\overline{z})^k\\ &= \sum_{n,k}(n+1)(k+1)(\overline{v}z)^n(v\overline{z})^k,\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \frac{\log|v|^2}{|1-\overline{v}z|^4}dA(v) &= \int_{\mathbb{D}} \log|v|^2 \left(\sum_{n,k}(n+1)(k+1)(\overline{v})^n v^k z^n (\overline{z})^k\right) dA(v)\\ &= \sum_{n,k}(n+1)(k+)z^n\overline{z}^k \int_{\mathbb{D}} \overline{v}^n v^k \log|v|^2 dA(v).\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}} \overline{v}^n v^k \log|v|^2 dA(v)\\ &\qquad = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r r^{n+k} e^{i(k-n)\theta} \log r^2 \frac{dr d\theta}{\pi}, \quad (v = re^{i\theta})\\ &\qquad = \int_0^1 r r^{n+k} \log r^2 dr \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} \frac{d\theta}{\pi}.\end{aligned}$$

Entonces por el ejercicio anterior,

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{v}^n v^k \log|v|^2 dA(v) = \begin{cases} \int_{\mathbb{D}} |v|^{2n} \log|v|^2 dA(v) & \text{si} \quad k = n\\ 0 & \text{si} \quad k \neq n.\end{cases}$$

Luego, por el teorema de Tonelli:

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{\log|v|^2}{|1-\overline{v}z|^4}dA(v) = \sum_n (n+1)^2 \int_{\mathbb{D}} |v|^{2n} \log|v|^2 dA(v)|z|^{2n}. \qquad (1)$$

Ahora,

$$\int_{\mathbb{D}} |v|^{2n} \log |v|^2 dA(v) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2n} \log r^2 \frac{rdrd\theta}{\pi} = 2 \int_0^1 r^{2n} \log r^2 rdr.$$

Sea $u = r^2$, entonces $du = 2rdr$. Así

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |v|^{2n} \log |v|^2 dA(v) = \int_0^1 u^n \log u du &= \lim_{n \to 0} \left(\left[\log u \frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \right) - \int_0^1 \frac{u^n}{n+1} du \\ &= \left[-\frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el lado derecho de (1) se convierte,

$$\sum_n -\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} |z|^{2n} = -\sum_n |z|^{2n} = -\left(\frac{1}{1-|z|^2} \right).$$

Luego,

$$(1-|z|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{\log |v|^2}{|1-\overline{v}z|^4} dA(v) = -(1-|z|^2)^2 = |z|^2 - 1.$$

y

$$\begin{aligned}B(g)(z) = (1-|z|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{\log \frac{1}{|v|^2}}{|1-\overline{v}z|^4} dA(v) & \\ &= -(1-|z|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{\log |v|^2}{|1-\overline{v}z|^4} \\ &= -(|z|^2 - 1) \\ &= 1 - |z|^2.\end{aligned}$$

Finalmente

$$f(v) = 1 - g(v) \Rightarrow B(f) = 1 - B(g) = 1 - (1-|z|^2) = |z|^2.$$

La transformación de Möbius presentada arriba tiene tiene ciertas propiedades básicas. Todas se siguen de cálculos directos.

Ejercicio 5.6. Para toda $a \in \mathbb{D}$ y $z \in \mathbb{D}$ tenemos $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a \circ \varphi_a(z) = z$. Más aún,

$$\varphi_a'(z) = -\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}$$

, y

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$$

.

Proposición 5.7. *Fórmula de cambio de variables. Si $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha) \quad \alpha > -1$, o si f es no negativa, entonces*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_a(w) dA_\alpha(w) = \int f(w) \frac{(1-|a|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{a}z|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w).$$

Demostración. Se sigue directamente de cálculos directos utilizando el ejercicio anterior. $\square$

Ejercicio 5.8. (Proposición) Sea $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha) \quad \alpha > -1$. Entonces la Transformada de Berezin de f está dada por la fórmula en (1), i.e.,

$$B_\alpha f(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_z(w) dA_\alpha(w) = \int f(w) \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{w}z|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w).$$

Proposición 5.9. *(La transformada de Berezin es Möbius invariante) Para toda f y toda $a \in \mathbb{D}$: $B(f \circ \varphi_a) = (B(f)) \circ \varphi_a$.*

Demostración. Sea $\varphi_a \in Aut(\mathbb{D})$, entonces φ_a es de la forma

$$\varphi_a(z) = e^{i\theta} \frac{a-z}{1-\overline{a}z}.$$

Luego, de (1) se sigue que

$$B(f \circ \varphi_a)(z) = (1-|z|^2)^2 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{f \circ \varphi_a(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^4} dA(\zeta) = (1-|z|^2)^2 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(e^{i\theta}\frac{a-\zeta}{1-\overline{a}z})}{|1-\overline{\zeta}z|^4} dA(\zeta)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}(B(f) \circ \varphi_a)(z) &= B(f)(e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}) \\ &= (1-|e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}|^2)^2 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{|1-\overline{w}e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}|^4} dA(w).\end{aligned}$$

Ahora, sea $w = \varphi_a(\zeta) = e^{i\theta}\frac{a-\zeta}{1-\overline{a}\zeta}$, entonces $dA(w) = \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}\zeta|^4}dA(\zeta)$, por lo que

$$|e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}|^2 = |\frac{a-z}{1-\overline{a}z}|^2 = \frac{|a|^2 - 2Re(\overline{a}z) + |a|^2}{1 - 2Re(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2}.$$

Entonces

$$1 - |e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Por otro lado también tenemos

$$\begin{aligned}
1 - we^{i\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z} &= 1 - \frac{\overline{a}-\overline{\zeta}}{1-\overline{\zeta}a}\frac{a-z}{1-\overline{a}z} \\
&= \frac{1-\overline{a}z - a\overline{\zeta} + |a|^2\overline{\zeta}z - |a|^2 + \overline{a}z + a\overline{\zeta} - \overline{\zeta}z}{(1-a\overline{\zeta})(1-\overline{a}z)} \\
&= \frac{(1-|a|^2)(1-\overline{\zeta}z)}{(1-a\overline{\zeta})(1-\overline{a}z)}.
\end{aligned}$$

Finalmente llegamos a que

$$\begin{aligned}
(B(f)\circ\varphi_a)(z) &= \frac{(1-|z|^2)^2(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}z|^4}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(e^{i\theta}\frac{a-\zeta}{1-\overline{a}\zeta})}{\frac{(1-|a|^2)^4|1-\overline{\zeta}z|^4}{|1-\overline{\zeta}a|^4|1-\overline{a}z|^4}}\frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}\zeta|^4}dA(\zeta) \\
&= (1-|z|^2)^2\int_{\mathbb{D}} \frac{f(e^{i\theta}\frac{a-\zeta}{1-\overline{a}\zeta})}{|1-\overline{\zeta}z|^4}dA(\zeta) \\
&= B(f\circ\varphi_a)(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}
\end{aligned}$$

Así, vemos que $(B(f))\circ\varphi_a = B(f\circ\varphi_a)$. □

6. Transformaciones de Möbius del plano complejo extendido.

Definición 6.1 (transformaciones de Möbius)**.** Se denota por $\mathrm{M\ddot{o}b}(\overline{\mathbb{C}})$ al conjunto de funciones $L\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tales que existen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, con $ad - bc \neq 0$ y

$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}} \quad L(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{11}$$

Formalmente la igualdad (11) no define bien el valor de la función L en el punto infinito ni en el punto donde se anula el denominador. El valor de L en estos puntos se define por continuidad (ver los ejercicios 6.2 y 6.3).

Ejercicio 6.2 (puntos singulares de una transformación de Möbius)**.** Sea L una función de la forma (11) y sea

$$s = \begin{cases} -\frac{d}{c}, & \text{si} \quad c \neq 0; \\ \infty, & \text{si} \quad c = 0. \end{cases}$$

Verificar que $L(s) = \infty$ en el sentido que

$$\lim_{z \to s} L(z) = \infty.$$

Sugerencia: considerar dos casos y utilizar la definición de límite.

Ejercicio 6.3 (valor de una transformación de Möbius en el punto infinito)**.** Sea L una función de la forma (11). Entonces el valor de la función L en el punto ∞ se define como el límite

$$\lim_{z \to \infty} L(z).$$

Calcular este límite, considerando dos casos: $c = 0$ y $c \neq 0$.

Ejercicio 6.4 (derivada de una transformación de Möbius)**.** Sea L una función de la forma (11). Entonces su derivada está dada por

$$L'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \tag{12}$$

Veremos que la condición $ad - bc \neq 0$ es necesaria para que L definida mediante (11) sea biyectiva.

Proposición 6.5. *Sea $L\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una biyección de la forma*

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Entonces $ad - bc \neq 0$.

Demostración. La afirmación sigue del ejercicio 6.4. □

Proposición 6.6. *Sea* $L \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$, *entonces* L *es una biyección de* $\overline{\mathbb{C}}$ *sobre* $\overline{\mathbb{C}}$ *y* $L^{-1} \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$.

Demostración. Veremos que para cada $w \in \overline{\mathbb{C}}$ dada, la ecuación $L(z) = w$ tiene una única solución.

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} = w \quad &\Longleftrightarrow \quad az + b = w(cz+d) \\ &\Longleftrightarrow \quad az - cwz = dw - b \\ &\Longleftrightarrow \quad z(cw-a) = -dw + b \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \frac{-dw+b}{cw-a}. \end{aligned}$$

La cadena de equivalencias escrita arriba es válida para $c \neq 0$, $w \neq \infty$, $w \neq a/c$, y muestra que bajo estas restricciones la ecuación $L(z) = w$ tiene una única solución

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}. \tag{13}$$

Consideramos los casos especiales:

1. Si $c = 0$, entonces $d \neq 0$, la función L es un polinomio de grado uno y la ecuación $L(z) = \infty$ tiene una única solución $z = \infty$.
2. Si $c \neq 0$ y $w = \infty$, entonces la única solución de la ecuación $L(z) = w$ es $z = -d/c$.
3. Si $c \neq 0$ y $w = a/c$, entonces la única solución de la ecuación $L(z) = w$ es $z = \infty$.

Estos casos especiales pueden obtenerse como límites de (13). Compare con los ejercicios 6.2 y 6.3. La fórmula (13) define la inversa de L la cual es de la forma (11) con coeficientes $-d, b, c, -a$ que satisfacen $(-d)(-a) - bc \neq 0$. □

Proposición 6.7. *Sean* $L_1, L_2 \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$. *Entonces* $L_1 \circ L_2 \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$.

Demostración. Sean a_1, b_1, c_1, d_1 y a_2, b_2, c_2, d_2 los coeficientes de L_1 y L_2, respectivamente:

$$L_1(w) = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1} \qquad \text{y} \qquad L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Para cualquier $z \notin \left\{\infty, L_1^{-1}(\infty), \left(L_2^{-1} \circ L_1^{-1}\right)(\infty)\right\}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
L_1\left(L_2(z)\right) &= L_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right)\\
&= \left(a_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right)+b_1\right)\Big/\left(c_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right)+d_1\right)\\
&= \frac{a_1(a_2z+b_2)+b_1(c_2z+d_2)}{c_1(a_2z+b_2)+d_1(c_2z+d_2)}\\
&= \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(a_2c_1+c_2d_1)z+(b_2c_1+d_1d_2)}.
\end{aligned}
$$

Acabamos de deducir la fórmula

$$
L_1(L_2(z)) = \frac{Az+B}{Cz+D}, \tag{14}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
A &= a_1a_2+b_1c_2, \quad B = a_1b_2+b_1d_2,\\
C &= a_2c_1+c_2d_1, \quad D = b_2c_1+d_1d_2.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Además se observa que

$$
\begin{aligned}
AD-BC &= (a_1a_2+b_1c_2)(b_2c_1+d_1d_2)-(a_1b_2+b_1d_2)(a_2c_1+c_2d_1)\\
&= a_1a_2b_2c_1+a_1a_2d_1d_2+b_1c_2b_2c_1+b_1c_2d_1d_2\\
&\qquad -a_1b_2a_2c_1-a_1b_2c_2d_1-b_1d_2a_2c_1-b_1d_2c_2d_1\\
&= a_1a_2d_1d_2+b_1c_2b_2c_1-a_1b_2c_2d_1-b_1d_2a_2c_1\\
&= a_1d_1(a_2d_2-b_2c_2)-b_1c_1(a_2d_2-b_2c_2)\\
&= (a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)\neq 0.
\end{aligned}
$$

Es decir, $L_1 \circ L_2 \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$. □

Proposición 6.8. *La transformación identidad I es una transformación de Möbius.*

Demostración. $I(z) = \frac{1z+0}{0z+1}$. □

Definición 6.9. Sea X un conjunto. A un conjunto $\mathcal{T}_X$ de funciones $X \to X$ se le llama *grupo de transformaciones* de X si:

(i) La identidad $I \in \mathcal{T}_X$.

(ii) Si $f, g \in \mathcal{T}_X$, entonces $g \circ f \in \mathcal{T}_X$.

(iii) Si $f \in \mathcal{T}_X$, entonces $f^{-1} \in \mathcal{T}_X$.

De las proposiciones 6.6, 6.7 y 6.8 se sigue el siguiente

Teorema 6.10. *Las transformaciones de Möbius forman un grupo.*

Definición 6.11. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$. El *grupo lineal general complejo de grado* n, denotado por $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, es el conjunto de matrices no singulares de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$.

Definición 6.12. Sea $\mathcal{H}\colon \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{M\ddot{o}b}(\overline{\mathbb{C}})$ dada por la siguiente regla:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

El siguiente resultado dice que $\mathcal{H}$ transforma la operación de grupo.

Teorema 6.13. *$\mathcal{H}$ es un epimorfismo, es decir es un homomorfismo suprayectivo.*

Demostración. La propiedad suprayectiva de $\mathcal{H}$ es obvia por la definición de las transformaciones de Möbius. La propiedad multiplicativa de $\mathcal{H}$, se demuestra con las fórmulas (14) y (15). $\square$

Se sigue inmediatamente que cualquier trasnformada de Möbius es de la forma $\mathcal{H}(A)$ para alguna $A \in GL(n, \mathbb{C})$, es decir, se le pide

Ejercicio 6.14. Calcular $\ker(\mathcal{H})$.

Observación 6.15. Sea $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces la expresión (12) puede expresarse como

$$f'(z) = \frac{\det A}{(cz + d)^2}.$$

También la condición para los coeficientes se puede dar en términos del determinante de la matriz A.

Transformaciones especiales de Möbius

En el grupo $\mathrm{M\ddot{o}b}(\overline{\mathbb{C}})$ existen varios subgrupos fundamentales formados por tranformaciones básicas.

Definición 6.16 (Transformaciones especiales de $\overline{\mathbb{C}}$)**.** Sea $a \in \mathbb{C}$, $d > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Se definen las siguientes transformaciones en $\mathrm{M\ddot{o}b}(\overline{\mathbb{C}})$:

- Traslación: $T(z) := z + a \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$
- Homotecia: $H(z) := dz \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$
- Giros: $G(z) := e^{i\theta} z \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$
- Inversiones: $Inv(z) := 1/z \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$

También se hizo mención de la trasnformación identidad $z \longrightarrow z, \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$. La cual forma forma parte de ésta lista de manera trivial.

Proposición 6.17. *Todo Transformación en* $\text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ *se puede expresar como composición de transformaciones especiales de* $\text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ *(translaciones, homotecias, giros e inversiones.)*

Demostración. Sea $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$. Obviamente se demostrará la proposición por casos. Para $c = 0$, $T(z) = \alpha z + \beta$, donde $\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = \frac{b}{d}$. Entonces, se toma z, luego se gira un ángulo igual al argumento de α, posteriormente se aplica una homotecia a una cantidad igual al módulo de α y finalmente se traslada el punto β unidades. Es decir,

$$\begin{aligned} z &\mapsto e^{i\cdot\arg(\alpha)}z \\ &\mapsto |\alpha|e^{i\arg(\alpha)}z \\ &\mapsto |\alpha|e^{i\cdot\arg(\alpha)}z + \beta \\ &= \alpha z + \beta. \end{aligned}$$

Finalmente, si $c \neq 0$, se observa la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= T(z) - \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{c(az+b) - a(cz+d)}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{acz + bc - acz - ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)} + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Y así, al tomar un punto z, éste se traslada $\frac{d}{c}$ unidades, posteriormente se invierte, luego se gira un ángulo igual al argumento de $\frac{bc-ad}{c^2}$, además se aplica una homotecia igual al módulo de $\frac{bc-ad}{c^2}$ y finalmente se traslada $\frac{a}{c}$ unidades. En efecto,

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + \frac{d}{c} \\ &\mapsto \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \\ &\mapsto e^{i\cdot\arg(\frac{bc-ad}{c^2})}\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \\ &\mapsto \left|\frac{bc-ad}{c^2}\right| e^{i\cdot\arg(\frac{bc-ad}{c^2})}\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \\ &\mapsto \left|\frac{bc-ad}{c^2}\right| e^{i\cdot\arg(\frac{bc-ad}{c^2})}\frac{1}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c} \end{aligned} \qquad \square$$

Biholomorfismos del plano complejo extendido son transformaciones de Moebius

Una transformación en el plano que preserva medidas de ángulos se llama *conforme*. En análisis complejo es conocido el hecho de que una función diferenciable con derivada no cero preserva ángulos y orientación y que esta misma condición describe su inyectividad.
Definición 6.18. Sean G y H dos dominios. Una biyección holomorfa entre ellos se llama *biholomorfismo.*

Estos biholomorfismos establecen homeomorfismos conformes entre los dominios, a tales transformaciones algunos las llaman equivalencias conformes. Estos conceptos pueden generalizarse a dominios del plano complejo extendido $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \subset \{0\}$ cuya representación geométrica es la esfera de Riemann. En el caso especial de que $G = H$ en la definición anterior, tal función se conoce como *automorfismo* conforme de G y se denota como $\mathrm{Aut}(G)$.

Pueden estudiarse ejemplos fundamentales de estas transformaciones conformes de los dominios canónicos $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, y $\mathbb{H}$. En esta sección demostraremos que $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ y los resultados para los dominios canónicos restantes se seguirán de él. Es claro que sólo basta probar la primera contención. Primero haremos uso del siguiente
Lema 6.19. *Sea $L : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una biyección que es holomorfa en $\mathbb{C}$. Entonces L es un polinomio de grado uno.*

Demostración. Supongamos que $L(\infty) = \infty$. En este caso L es entera y su desarrollo de Taylor-McClaurin converge en todos los puntos de $\mathbb{C}$:

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{16}$$

Notemos que (16) es un desarrollo en serie de Laurent de la función en una vecindad agujerada de infinito, y como por hipótesis infinito es un polo, la parte singular de este desarrollo tiene una cantidad finita de términos. También notemos que como se trata del punto singular infinito, la parte singular consiste de las potencias positivas. Esto significa que L debe ser un polinomio. Sea m la multilicidad de L. Supongamos entonces que $m \geq 2$. Entonces por el teorema fundamental del Álgebra se tendrían por lo menos dos casos: L tiene a lo menos dos ceros z_1, z_2 distintos contando multiplicidades o existe por lo menos un cero z_1 de multiplicidad $m \geq 2$. En el primer caso, $L(z_1) = L(z_2) = 0$, pero la inyectividad de L implica que $z_1 = z_2$. Esto contradice el hecho de que z_1 y z_2 son diferentes. Para el otro caso se observa finalmente que L se expresaría como

$$L(z) = a_m(z - z_1)^m + a_{m+1}(z - z_1)^{m+1} + \dots$$

y su derivada

$$L'(z) = m a_m (z - z_1)^{m-1} + \dots$$

evaluada en z_1: $L'(z_1) = 0$ lo que contradice la inyectividad de L. De esto se sigue que $L(z) = az + b$. □

Procedemos ahora a demostrar el resultado principal de esta sección.
Teorema 6.20. *Sea* $L \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$*. Entonces* $L \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$.

Demostración. Probemos por casos. Si $L(\infty) = \infty$, entonces por el lema anterior $L(z) = az + b$, luego $L \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$. Ahora supongamos que $L(\infty) = z_0, \quad z_0 \neq \infty$. Entonces, se considera $L_1 := \frac{1}{z - z_0}$. Es evidente que $L_2 := L_1 \circ L \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ y satisface $L_2(\infty) = \infty$, entonces por el caso anterior $L_2 \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ y

$$L = L_1^{-1} \circ L_2$$

Finalmente, en virtud del teoema (6.10) se sigue que $L \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ □

Observación 6.21. Debe notarse que L no cambia cuando a, b, c y d son multiplicadas por una constante común:

$$
\begin{aligned}
L(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\
&= \frac{\lambda az+\lambda b}{\lambda cz+\lambda d} \\
&= \lambda L(z).
\end{aligned}
$$

Por esta razón, se puede "normalizar"la expresión $ad - bc \neq 0$ para expresarla como $ad - bc = 1$.

7. Biholomorfismos del disco unitario.

Ahora estudiamos una subfamilia de las transformaciones de Möbius que determinan -como se probará más adelante- a todos los mapeos conformes del disco en el disco.
Definición 7.1. Sea $a \in \mathbb{D}$ denotemos por φ_a a la transformación de Möbius dada por

$$\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}; \tag{17}$$

esta transformación tiene un cero en $z = a$ y un polo simple en $z = \frac{1}{\overline{a}} \notin \mathbb{D}$.
Ejercicio 7.2. Demostrar que dado $a \in \mathbb{D}$, entonces $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.
Corolario 7.3. *Sea $a \in \mathbb{D}$, entonces φ_a es inyectiva.*
Proposición 7.4. *Sea $a \in \mathbb{D}$, entonces $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$.*

Demostración. Sea $z \in \partial\mathbb{D}$, entonces $z = e^{i\theta}$ y

$$|\varphi_a(z)| = |\varphi_a(e^{i\theta})| = \left|\frac{a-e^{i\theta}}{1-\overline{a}e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{a-e^{i\theta}}{e^{-i\theta}-\overline{a}}\right| = \frac{|a-e^{i\theta}|}{|\overline{a-e^{i\theta}}|} = 1.$$

Además como φ_a es inyectiva y dado que mapea circunferencias en circunferencias o rectas se concluye que $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. □

Ejercicio 7.5. Sea φ_a como en (17), entonces para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumple que

$$|\varphi_a'(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}z|^4},$$

y

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Ejercicio 7.6 (Propiedades de φ_a.)**.** Demuestre calculando directamente para cada caso que:

$$\varphi_a(\varphi_a(z)) = z, \tag{18}$$

$$\varphi_a(0) = a, \tag{19}$$

$$\varphi_a(a) = 0, \tag{20}$$

$$|\varphi_a(e^{i\theta})| = 1. \tag{21}$$

Ejercicio 7.7 (propiedades de la derivada de φ_a)**.** Demuestre calculando directamente para cada caso que:

- $\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}$

- $\varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$
- $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$
- $\varphi_a^{-1}(z) = \varphi_{-a}(z)$
- $(\varphi_a^{-1})'(z) = \varphi_{-a}'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2}$
- $|\varphi_a'(a)| = 1/|\varphi_{-a}'(0)|$

El siguiente teorema nos será muy útil.
Teorema 7.8. *(Teorema del mapeo abierto.) Ses f una función analítica y no constante en un dominio G, entonces $f(G)$ es también un dominio.*
Ejercicio 7.9. Demuestre que $f(G)$ en el teorema anterior es un conjunto conexo.
Teorema 7.10. *(Principio del módulo máximo.) Sea f una función analítica y no constante en un dominio G, entonces $|f(z)|$ no puede tener un máximo en ningún punto de G.*

Demostración. Sea z_0 un punto arbitrario de G, y sea $w_0 = f(z_0)$. La imagen de cualquier vecindad $\mathcal{V}(z_0) \subset G$ es un dominio que contiene a w_0 y por eso contiene alguna vecindad de w_0. Entonces $\mathcal{V}(z_0)$ contiene un punto z cuya imagen $w = f(z)$ está más allá del orígen en el plano-w que el punto w_0 mismo, es decir que $|f(z)| > |f(z_0)|$. En otras palabras, $|f(z)|$ no puede tener un máximo en z_0. $\square$

Ahora se demuestra una consecuencia muy poderosa del principio del módulo máximo.
Teorema 7.11. *(Lema de Schwarz.) Sea $f(z)$ una función analítica en el disco $D_R := \{|z| < R\}$ que se anula en $z = 0$, y suponga que para todo $z \in D_R$*

$$|f(z)| \leq M < \infty. \tag{22}$$

Entonces la desigualdad

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z| \tag{23}$$

se cumple para todo z, y más aún

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}. \tag{24}$$

La igualdad se cumple en la primera desigualdad o en la segunda si y sólo si $f(z)$ es una función de la forma

$$f(z) = \frac{M}{R}e^{i\theta}z, \tag{25}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración. Como f es analítica, del desarrollo en serie de Taylor se tiene

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)z^2}{2!} + \dots \quad (z \in D_R)$$

($f(0) = 0$ por hipótesis). Por otro lado, es evidente que la función

$$\varphi = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + \frac{f''(0)z}{2!} + \dots$$

es analítica en el disco D_R y toma el valor $f'(0)$ en el origen. Sea γ_ρ el círculo $|z| = \rho$, donde $0 < \rho < R$. Como la desigualdad

$$|\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{M}{\rho}$$

se cumple para todo $z \in \gamma_\rho$, entonces en virtud del principio del módulo máximo

$$|\varphi(z)| \leq \frac{M}{\rho}$$

para todo punto en el interior de γ_ρ, es decir $\forall z \in I(\gamma_\rho)$. Por eso, al hacer $\rho \to R$. se tendrá

$$|\varphi(z)| \leq \frac{M}{R} \tag{26}$$

para todo $z \in D_R$. Si $z \neq 0$ se sustituye por $\varphi(z)$ en (26), para obtener

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|.$$

esta es la desigualdad (23), que obviamente es válida para $z = 0$. Más aún, $\varphi(0) = f'(0)$, y por lo tanto, cuando $z = 0$, (26) toma la forma

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R},$$

que es justamente la igualdad (24). Finalmente, nótese que (23) puede ser una igualdad para algún $z \in D_R$ distinto de cero o (24) puede volverse una igualdad sí y sólo si (26) se vuelve una igualdad para algún z. Pero de acuerdo con el principio del módulo máximo, esto sólo es posible si $\varphi(z)$ es constante en D_R. Como ésta constante debe tener valor absoluto igual a M/R, se sigue que

$$\varphi(z) = \frac{M}{R}e^{i\theta},$$

o equivalentemente, que

$$f(z) = \frac{M}{R} e^{i\theta} z$$

□

Como consecuencia podemos ahora caracterizar a todos los biholomorfismos del disco unitario

Ejercicio 7.12. Sea g una función de la forma (17). Entonces $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema 7.13. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Entonces f es un biholomorfismo del disco unitario sí y sólo si existen $a \in \mathbb{D}$, y $\theta \in \mathbb{R}$ tales que*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \tag{27}$$

Demostración. Si f es de la forma (17) entonces es un biholomorfismo del disco por el ejercicio 7.12. Recíprocamente, supongamos que $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una biyección holomorfa y sea $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$ y consideremos una función de la forma (17). Definamos $g := f \circ \varphi_{-a} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, entonces por las propiedades de φ_a (ejercicio 6) se sigue directamente que $g(0) = 0$ y $g^{-1} = \varphi_a \circ f^{-1}$ también satisface $g^{-1}(0) = 0$. Entonces por el lema de Schwarz, la regla de la cadena y el ejercicio 6

$$|g'(0)| = |(f \circ \varphi_{-a})'(0)| \leq 1$$

sí y sólo si

$$|f'(a) \cdot \varphi_{-a}(0)| \leq 1,$$

sí y sólo si

$$|f'(a)| \leq 1/|\varphi'_{-a}(0)| = |\varphi'_a(a)|.$$

De la misma manera, pero ahora usando también el teorema de la función inversa y el hecho de $f(a) = 0$ se ve directamente que

$$|\left(g^{-1}\right)'(0)| = |\left(\varphi_a \circ f^{-1}\right)'(0)| \leq 1$$

sí y sólo si

$$|\varphi'_a(f^{-1}(0)) \cdot \left(f^{-1}\right)'(0)| \leq 1$$

sí y sólo si

$$|\varphi'_a(a) \cdot \left(f^{-1}\right)'(0)| \leq 1$$

sí y sólo si

$$|\varphi'_a(a)| \leq \frac{1}{|\left(f^{-1}\right)'(0)|} = |f'(a)|,$$

esto es

$$|f'(a)| = |\varphi'_a(a)| = \frac{1}{|\varphi'_{-a}(0)|}.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\left|\left(f\circ\varphi_{-a}\right)'(0)\right| &= \left|f'(\varphi_{-a}(0))\cdot\varphi_{-a}'(0)\right| \\
&= \left|f'(a)\cdot\varphi_{-a}'(0)\right| = \left|f'(a)\right|\cdot\left|\varphi_{-a}'(0)\right| = \frac{1}{\left|\varphi_{-a}'(0)\right|}\cdot\left|\varphi_{-a}'(0)\right| = 1.
\end{aligned}
$$

Entonces nuevamente por el lema de Schwarz existe $\theta\in\mathbb{R}$, tal que para todo $z\in\mathbb{D}$

$$f\circ\varphi_{-a}(z) = e^{i\theta}z,$$

o lo que es lo mismo

$$f(z) = g\left(\varphi_a(z)\right) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad \forall z\in\mathbb{D} \qquad \square$$

Observación 7.14. Puede obtenerse más información todavía. En efecto, al derivar la última expresión, se obtiene que

$$f'(z) = e^{i\theta}\frac{1-|a|^2}{\left(1-\overline{a}z\right)^2},$$

de donde haciendo $z=a$

$$f'(a) = e^{i\theta}\frac{1}{1-|a|^2},$$

lo que implica que $\theta\in\arg\left(f'(a)\right)$.

Ejercicio 7.15. Sea $\Omega\neq\mathbb{C}$ un abierto para el que existen biyecciones holomorfas $f,g:\Omega\to\mathbb{D}$ tales que $f(a)=g(a)=0$ para algún $a\in\Omega$. Entonces existe $\theta\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = e^{i\theta}g(z) \quad \forall z\in\Omega$$

.

Ejercicio 7.16. Sea $L\in\text{Möb}(\mathbb{D})$, entonces

$$L(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}},$$

donde $a,b\in\mathbb{C}$ y satisfacen $|a|^2-|b|^2=1$.

Para el semiplano superior $\mathbb{H}$, también existen resultados análogos que se siguen directamente de lo ya demostrado. Es nuevamante evidente que sólo basta demostrar una contención.

Ejercicio 7.17. Sea L una función definida por la regla

$$L(z) := \frac{z-i}{z+i},$$

entonces L es un biholomorfismo entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}$.

A continuación, se muestra que todo elemento de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ es de la forma (11)
Teorema 7.18. *Sea* $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, *entonces* $T \in \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$.

Demostración. Sea $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, se define $L_1 := L \circ T \circ L^{-1}$, donde L es la transformación del ejercicio (7.17), entonces es evidente que $L_1 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Pero entonces

$$T = L^{-1} \circ L_1 \circ L.$$

Entonces, como $L^{-1} \circ L_1 \circ L \in \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ (por el ejercicio (6.10)), se sigue la afirmación $\square$

Referencias

[1] ARONSZAJN, NACHMAN (1950). Theory of Reproducing Kernels. *Transactions of the American Mathematical Society* 68 (3): 337–404.

[2] BERGMAN, STEFAN (1950, 1970) *The Kernel Function and Conformal Mapping*, American Mathematical Society.

[3] BERGMAN, STEFAN; SCHIFFER, MENAHEM MAX (1953). *Kernel Functions and elliptic differential equations in mathematical physics*, Academic Press.

[4] BERGMAN, STEFAN; HERIOT (1961). Application of the method of the kernel function for solving boundary value problems. Numerische Mathematik 3.

[5] BERGMAN, STEFAN (1969) *Integral operators in the theory of linear partial differential equations*, 2nd ed. Springer 1961.

[6] BOCHNER, SALOMOM; GUNNING, ROBERT C., ED. (1992) *Collected papers.* Parts 1, 2, 3, 4. Providence, R.I.: American Mathematical Society.

[7] CANAVATI AYUB JOSÉ ÁNGEL(1998) *Introducción al Análisis Funcional* Fondo de cultura económica. México D.F.
ISBN 968-16-5724-1.

[8] GARRO GÓMEZ GUILLERMO(2003) *Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo* Tesis profesional UNAM.

[9] MERCER, J. (1909). Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations, Philosophical Transactions of the Royal Society A 209 (441-458): 415-446.

[10] MOORE E. H (1916). On properly positive Hermitian matrices, Bull. American Mathematical Society. vol 23 (1916) p. 59 .

[11] MOORE E. H (1935,1939). General analysis, Memoirs of the America Philosophical Society. Part I, 1935. Part II, 1939.

[12] STROETHOFF, KAREL (1997). The Berezin transform and operators on spaces of analytic functions. *Linear Operators, edited by J. Zemánek, Banach Center Publications, Polish Academy of Sciences, Warsaw*, 38, 361–380.
`http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/bcp/bcp38/bcp38122.pdf`

[13] SZEGÖ, GÁBOR; PÓLYA, GEORGE (1925, 1972). *Problems and theorems in analysis*, 2 Vols, Springer-Verlag.

[14] Szegö, Gábor; Grenander, Ulf (1958). *Toeplitz forms and their applications*, Chelsea.

[15] Zaremba, Stanislaw (1907). Zarys pierwszych zasad teoryi liczb calkowitych (in Polish). Kraków: Akademia Umiejetności.

[16] Zhu, Kehe (2007). *Operator theory in function spaces. Second edition.* Series: Mathematical surveys and monographs, Volume 138, 348 pages. American Mathematical Society.
ISBN 978-0-8218-3965-2.
`http://www.ams.org/bookpages/surv-138`

[17] Zorboska, Nina (2003). The Berezin transform and radial operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131:3, 793–800.
DOI: 10.1090/S0002-9939-02-06691-1
`http://www.ams.org/journals/proc/2003-131-03/S0002-9939-02-06691-1/home.html`