El rango esencial de una función

Arroyo Sánchez Dante, Cano Flores Sofía.

Marzo y Abril de 2020

1 Definición. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $f \in \mathcal{M}\left(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+\right)$. El *rango esencial* de f se define como:

$$\mathcal{ER}(f) := \left\{w \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \mu\left(\{x \in X : \ |f(x) - w| < \varepsilon\}\right) > 0\right\}.$$

2 Lema. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida, y sea* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$*. Entonces*

$$\mathcal{ER}(f) = \left\{w \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \mu\left(f^{-1}\left[B(w, \varepsilon)\right]\right) > 0\right\}.$$

Demostración. En efecto, basta notar lo siguiente:

$$\begin{aligned} f^{-1}\left[B(w, \varepsilon)\right] &= \{x \in X : \ f(x) \in B(w, \varepsilon)\} \\ &= \{x \in X : \ |f(x) - w| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

□

3 Proposición. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida, y sea* $f \in \mathcal{M}\left(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+\right)$*. Entonces* $\mathcal{ER}(f)$ *es un conjunto cerrado.*

Demostración. Mostremos que el complemento de $\mathcal{ER}(f)$ es abierto en $\mathbb{R}_+$.

Sea $t \in (\overline{\mathbb{R}}_+ \backslash \mathcal{ER}(f))$.

Se tiene particularmente que $t \notin \mathcal{ER}(f)$, lo cual implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mu\left(f^{-1}\left[B(t,\varepsilon)\right]\right) = 0$.

Sea $z \in B(t,\varepsilon)$.

Como $B(t,\varepsilon)$ es un abierto en $\mathbb{R}_+$, hallamos $\varepsilon^* > 0$ tal que $B(z,\varepsilon^*) \subset B(t,\varepsilon)$.

Por propiedades de la preimagen, $f^{-1}\left[B(z,\varepsilon^*)\right] \subset f^{-1}\left[B(t,\varepsilon)\right]$.

Finalmente, por propiedades de la medida $\mu\left(f^{-1}\left[B(z,\varepsilon^*)\right]\right) \leq \mu\left(f^{-1}\left[B(t,\varepsilon)\right]\right) = 0$.

Por lo tanto, $\mu\left(f^{-1}\left[B(z,\varepsilon^*)\right]\right) = 0$.

Se concluye así que $z \notin \mathcal{ER}(f)$.

Por la arbitrariedad de z, se tiene que $B(t,\varepsilon) \subset (\overline{\mathbb{R}}_+ \backslash \mathcal{ER}(f))$.

Por lo tanto, $(\overline{\mathbb{R}}_+ \backslash \mathcal{ER}(f))$ es un abierto. □

4 Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico.

1. El espacio (X,τ) es un *espacio segundo numerable* si su topología tiene una base numerable.

2. El espacio (X,τ) es un *espacio de Lindelöf* si cada cubierta abierta del espacio tiene una subcubierta numerable.

5 Lema. *El conjunto* $\mathcal{B} := \{(a,b) \;:\; a,b \in (0,+\infty)\}$, *es una base para la topología usual definida en el conjunto* $(0,+\infty)$.

6 Lema. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico y sea* $\mathcal{B} \subset \tau$.

Entonces, $\mathcal{B}$ *es una base para* τ *si y sólo si dados* $U \in \tau$ *y* $p \in U$, *existe* $B \in \mathcal{B}$ *tal que* $p \in B \subset U$.

7 Lema. *El espacio topológico* $(0,+\infty)$ *es segundo numerable.*

Demostración. Consideremos la siguiente colección:

$$\mathcal{C} := \{(a,b) \;\; : \;\; a,b \in \mathbb{Q} \cap (0,+\infty) \;\}.$$

Notemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \tau$, donde $\mathcal{B}$ es la base dada en el lema 5.

Veamos que $\mathcal{C}$ es una base para la topología.

Sea $V \in \tau$, entonces por el lema 5 podemos hallar una familia de intervalos abiertos, a decir $\mathcal{A}$ tal que:

$$V = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Sea $v \in V$, entonces, existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A_0$. Como A_0 es un intervalo, existen $a,b \in (0,+\infty)$, $a \neq b$, tales que $A_0 = (a,b)$.

Notamos que $a < v < b$ entonces, por la densidad de los racionales en los reales, existen $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $a < q_1 < v < q_2 < b$. Es decir,

$$v \in (q_1,q_2) \subset (a,b) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} = V.$$

Además, $(q_1,q_2) \in \mathcal{C}$. Entonces, por el lema 6, concluimos que $\mathcal{C}$ es una base para la topología.

Como $\mathcal{C} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, y $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable, concluimos que $\mathcal{C}$ es a lo más numerable.

Por lo tanto, $(0,\infty)$ es segundo numerable. $\square$

8 Proposición. *Sea (X,τ) un espacio segundo numerable, entonces es de Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de τ, y sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X.

Dado $x \in X$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como $A \in \tau$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$ (por el lema 6).

Sea $K := \{m \in \mathbb{N} \;\; : \;\; B_m \in \mathcal{B} \;\; \wedge \;\; (\exists A \in \mathcal{A} \;\; B_m \subset A)\}$.

Por lo expuesto anteriormente, tenemos que $K \neq \emptyset$. Dado $k \in K$, hallamos $A_k \in \mathcal{A}$ tal que $B_k \subset A_k$.

Sea $\mathcal{A}^* := \{A_k\}_{k\in K}$. Veamos que es una cubierta de X.

Como $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$, tenemos que $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}^*} A \subset X$.

Sea $x \in X$, entonces hallamos $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Por otro lado, existe $B_j \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_j \subset A$. Luego $j \in K$, $x \in A$ y $A \in \mathcal{A}^*$.

Se concluye así que $X = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}*} A$.

Como $K \subset \mathbb{N}$, concluimos que $\mathcal{A}^*$ es una cubierta abierta numerable de X. □

9 Corolario. *El espacio* $(0, +\infty)$ *es de Lindelöf.*

10 Corolario. *Cada conjunto abierto en* $[0, +\infty)$ *es una unión numerable o finita de bolas.*

11 Proposición. *Sea* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. *Entonces*

$$\mu\Big(f^{-1}\big[[0, +\infty] \setminus \mathcal{ER}(f)\big]\Big) = 0.$$

Demostración. Pongamos $A := [0, +\infty] \setminus \mathcal{ER}(f)$.

Notamos que para cada $a \in A$, con $a \neq \infty$, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $\mu\left(f^{-1}\left[B(a, \varepsilon_a)\right]\right) = 0$, y más aún $B(a, \varepsilon_a) \subset A$ pues $A \in \tau_u$.

Consideramos $\mathcal{A} := \{B(a, \varepsilon_a) \ : \ a \in A\}$. Entonces $A = \cup\mathcal{A}$

Como el espacio es de Lindelöf, particularmente para A podemos hallar una subcubierta numerable a partir de la cubierta ya dada, a decir $\mathcal{A}' := \{B\left(a_n, \varepsilon_{a_n}\right)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu\left(f^{-1}[A]\right) &= \mu\left(f^{-1}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B\left(a_n, \varepsilon_{a_n}\right)\right]\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left[B\left(a_n, \varepsilon_{a_n}\right)\right]\right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(f^{-1}\left[B\left(a_n, \varepsilon_{a_n}\right)\right]\right) = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, si $a = +\infty$, como $+\infty \in \mathcal{ER}(f)$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\mu(f^{-1}[(\gamma, +\infty]]) = 0.$$

Y así, si hacemos $\mathcal{A}' \cup (\gamma, +\infty]$, dicha unión sigue siendo una cubierta para A, y se sigue cumpliendo que $\mu\left(f^{-1}[A]\right) = 0$. $\square$

12 Definición. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $f \in \mathcal{M}\left(X, \mathcal{F}\right)$. El *supremo esencial* de f se define como:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f := \text{ínf}\left\{b \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \ \mu\left(\{x \in X : \ f(x) > b\}\right) = 0\right\}$$

Donde

$$U(f, \mu) := \left\{b \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \ \mu\left(\{x \in X : \ f(x) > b\}\right) = 0\right\},$$

es el conjunto de *cotas esenciales* de f.

13 Proposición. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $f \in \mathcal{M}\left(X, \mathcal{F}\right)$. Entonces*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = \sup\left\{w \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \ w \in \mathcal{ER}(f)\right\}.$$

Demostración. Definamos lo siguiente:

$s := \sup \mathcal{ER}(f)$

$\gamma := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f$.

Veamos que $s \leq \gamma$. Para esto, probemos que si $w \in \mathcal{ER}(f)$ entonces $\gamma \geq w$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe $w_o \in \mathcal{ER}(f)$ tal que $\gamma < w_0$.

Para esto, notemos que el supremo esencial lo podemos ver también de la siguiente manera,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = \text{ínf}\{b \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \mu(f^{-1}[(b, \infty)]) > 0\}.$$

Por propiedades del supremo esencial, como $w_0 > \gamma$ entonces $w_0 \in U(f, \mu)$, es decir:

$$\mu(f^{-1}[(w_0, \infty)]) = 0,$$

y como $w_0 \in \mathcal{ER}(f)$ entonces

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mu(f^{-1}[B(w_0, \varepsilon)]) > 0.$$

Notemos que existe ε_0 tal que $w_0 - \varepsilon_0 > \gamma$, y así, si $x \in X$ es tal que $f(x) \in B(w_0, \varepsilon_0)$, tendríamos que (por la desigualdad inversa del triángulo)

$$f(x) > w_0 - \varepsilon_0 > \gamma$$

por lo que

$$\{x \in X : f(x) \in B(w_0, \varepsilon_0)\} \subset \{x \in X : f(x) > \gamma\}.$$

y entonces se tiene que

$$0 \leq \mu(\{x \in X : f(x) \in B(w_0, \varepsilon_0)\}) \leq \mu(\{x \in X : f(x) > \gamma\}) = 0.$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto, $s \leq \gamma$.

Veamos la otra desigualdad, $\gamma \leq s$.

Sea $S := [0, +\infty] \setminus [0, s]$.

Por la proposición 11,

Tenemos que $\mu\left(f^{-1}[S]\right) = 0$ es decir

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) > s\}\right) = 0.$$

Es decir,

$$s \in \{c \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \mu \ (x \in X : f(x) > c) = 0\} = U(f, \mu).$$

Y así,

$$\sup(\mathcal{ER}(f)) = s \geq \inf U(f, \mu) = \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = \gamma.$$

$\therefore s \geq \gamma.$

$\therefore s = \gamma.$ $\square$