Hiperplanos y semiespacios

Elisa Suarez Barraza, Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

21 de junio de 2023

Objetivos

Sean $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq \mathbf{0}$, $c \in \mathbb{R}$.

Vamos a estudiar propiedades básicas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} S_{w,c,=} &:= \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, w\rangle = c\Big\}, \\ S_{w,c,\geq} &:= \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, w\rangle \geq c\Big\}, \\ S_{w,c,>} &:= \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, w\rangle > c\Big\}. \end{aligned}$$

De manera similar se definen $S_{w,c,\leq}$ y $S_{w,c,<}$.

Plan

1. Complementos
2. Propiedades topológicas
3. Cerraduras e interiores
4. Convexidad

Proposición

$$(S_{w,c,>})^c = S_{w,c,\leq}, \qquad (S_{w,c,\geq})^c = S_{w,c,<}.$$

Demostración. Demostremos la primera de estas dos igualdades.

Proposición

$$(S_{w,c,>})^c = S_{w,c,\leq}, \qquad (S_{w,c,\geq})^c = S_{w,c,<}.$$

Demostración. Demostremos la primera de estas dos igualdades.

Para cada x en $\mathbb{R}^n$,

$$x \in (S_{w,c,>})^c$$

Proposición

$$(S_{w,c,>})^c = S_{w,c,\leq}, \qquad (S_{w,c,\geq})^c = S_{w,c,<}.$$

Demostración. Demostremos la primera de estas dos igualdades.

Para cada x en $\mathbb{R}^n$,

$$x \in (S_{w,c,>})^c \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, w \rangle \not> c$$

Proposición

$$(S_{w,c,>})^c = S_{w,c,\leq}, \qquad (S_{w,c,\geq})^c = S_{w,c,<}.$$

Demostración. Demostremos la primera de estas dos igualdades.

Para cada x en $\mathbb{R}^n$,

$$x \in (S_{w,c,>})^c \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, w \rangle \not> c \quad \Longleftrightarrow$$

Proposición

$$(S_{w,c,>})^c = S_{w,c,\leq}, \qquad (S_{w,c,\geq})^c = S_{w,c,<}.$$

Demostración. Demostremos la primera de estas dos igualdades.

Para cada x en $\mathbb{R}^n$,

$$x \in (S_{w,c,>})^c \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, w \rangle \not> c \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, w \rangle \leq c$$

Proposición

$$(S_{w,c,>})^c = S_{w,c,\leq}, \qquad (S_{w,c,\geq})^c = S_{w,c,<}.$$

Demostración. Demostremos la primera de estas dos igualdades.

Para cada x en $\mathbb{R}^n$,

$$x \in (S_{w,c,>})^c \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, w\rangle \not> c \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, w\rangle \leq c \quad \Longleftrightarrow$$

Proposición

$$(S_{w,c,>})^c = S_{w,c,\leq}, \qquad (S_{w,c,\geq})^c = S_{w,c,<}.$$

Demostración. Demostremos la primera de estas dos igualdades.

Para cada x en $\mathbb{R}^n$,

$$x \in (S_{w,c,>})^c \iff \langle x, w\rangle \not> c \iff \langle x, w\rangle \leq c \iff x \in S_{w,c,\leq}.$$

Proposición

$$(S_{w,c,>})^c = S_{w,c,\leq}, \qquad (S_{w,c,\geq})^c = S_{w,c,<}.$$

Demostración. Demostremos la primera de estas dos igualdades.

Para cada x en $\mathbb{R}^n$,

$$x \in (S_{w,c,>})^c \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, w \rangle \not> c \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, w \rangle \leq c \quad \Longleftrightarrow \quad x \in S_{w,c,\leq}.$$

La segunda igualdad se demustra de manera análoga.

Plan

Repaso: $\mathbb{R}^n$ como un espacio con producto interno

Consideramos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual (producto punto)

$$\langle a, b \rangle := \sum_{j=1}^{n} a_j b_j.$$

Repaso: $\mathbb{R}^n$ como un espacio con producto interno

Consideramos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual (producto punto)

$$\langle a, b \rangle := \sum_{j=1}^{n} a_j b_j.$$

Denotamos por $\| \cdot \|$ la norma asociada (la norma euclidiana):

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

Repaso: $\mathbb{R}^n$ como un espacio con producto interno

Consideramos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual (producto punto)

$$\langle a, b\rangle := \sum_{j=1}^{n} a_j b_j.$$

Denotamos por $\|\cdot\|$ la norma asociada (la norma euclidiana):

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}.$$

Sabemos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert real.

La función $x \mapsto \langle x, w \rangle$ es continua

Proposición

Sea $w \in \mathbb{R}^n$. Definimos $\varphi_w \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_w(x) := \langle x, w \rangle.$$

Entonces, la función φ_w es continua.

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración.

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>}$$

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} =$$

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x, w \rangle > c \right\}$$

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \; \langle x, w \rangle > c \right\} =$$

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \langle x, w\rangle > c\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \varphi_w(x) > c\right\}$$

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x, w\rangle > c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) > c\Big\}$$

$$=$$

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x, w\rangle > c\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) > c\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) \in (c, +\infty)\right\}$$

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x, w\rangle > c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) > c\Big\}$$

$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) \in (c, +\infty)\Big\} =$$

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \langle x, w\rangle > c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \varphi_w(x) > c\Big\}$$

$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \varphi_w(x) \in (c, +\infty)\Big\} = \varphi_w^{-1}\Big[(c, +\infty)\Big].$$

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, w\rangle > c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi_w(x) > c\Big\}$$

$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi_w(x) \in (c, +\infty)\Big\} = \varphi_w^{-1}\Big[(c, +\infty)\Big].$$

La función φ_w continua, y el rayo $(c, +\infty)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

Los semiespacios abiertos

Proposición

$S_{w,c,>}$ y $S_{w,c,<}$ son abiertos.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,>}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,>} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, w\rangle > c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi_w(x) > c\Big\}$$

$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi_w(x) \in (c, +\infty)\Big\} = \varphi_w^{-1}\Big[(c, +\infty)\Big].$$

La función φ_w continua, y el rayo $(c, +\infty)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, la preimagen es un conjunto abierto.

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Primera demostración, idea.

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Primera demostración, idea. Expresemos $S_{w,c,\geq}$ en términos de φ_w:

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Primera demostración, idea. Expresemos $S_{w,c,\geq}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,\geq}$$

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Primera demostración, idea. Expresemos $S_{w,c,\geq}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,\geq} =$$

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Primera demostración, idea. Expresemos $S_{w,c,\geq}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,\geq} = \varphi_w^{-1}\Big[\,[c,+\infty)\,\Big].$$

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Primera demostración, idea. Expresemos $S_{w,c,\geq}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,\geq} = \varphi_w^{-1}\Big[\,[c, +\infty)\,\Big].$$

La función φ_w continua, y el rayo $[c, +\infty)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Primera demostración, idea. Expresemos $S_{w,c,\geq}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,\geq} = \varphi_w^{-1}\Big[\,[c,+\infty)\,\Big].$$

La función φ_w continua, y el rayo $[c,+\infty)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

Segunda demostración, idea.

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Primera demostración, idea. Expresemos $S_{w,c,\geq}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,\geq} = \varphi_w^{-1}\Big[\,[c,+\infty)\,\Big].$$

La función φ_w continua, y el rayo $[c,+\infty)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

Segunda demostración, idea. $S_{w,c,\geq} = (S_{w,c,<})^c$,

Los semiespacios cerrados

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\leq}$ son cerrados.

Primera demostración, idea. Expresemos $S_{w,c,\geq}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,\geq} = \varphi_w^{-1}\Big[\,[c,+\infty)\,\Big].$$

La función φ_w continua, y el rayo $[c,+\infty)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

Segunda demostración, idea. $S_{w,c,\geq} = (S_{w,c,<})^c$, y el conjunto $S_{w,c,<}$ es abierto.

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración.

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=}$$

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} =$$

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \; \langle x, w \rangle = c \Big\}$$

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon\; \langle x, w \rangle = c \right\} =$$

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x, w\rangle = c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) = c\Big\}$$

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x, w\rangle = c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) = c\Big\}$$

$$=$$

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, w\rangle = c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi_w(x) = c\Big\}$$

$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi_w(x) \in \{c\}\Big\}$$

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x, w\rangle = c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) = c\Big\}$$

$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) \in \{c\}\Big\} =$$

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, w\rangle = c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi_w(x) = c\Big\}$$

$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi_w(x) \in \{c\}\Big\} = \varphi_w^{-1}\Big[\,\{c\}\,\Big].$$

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \langle x, w\rangle = c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \varphi_w(x) = c\Big\}$$
$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \varphi_w(x) \in \{c\}\Big\} = \varphi_w^{-1}\Big[\,\{c\}\,\Big].$$

La función φ_w continua, y $\{c\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

El hiperplano es cerrado

Proposición

$S_{w,c,=}$ es cerrado.

Demostración. Expresemos $S_{w,c,=}$ en términos de φ_w:

$$S_{w,c,=} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x, w\rangle = c\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) = c\Big\}$$
$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varphi_w(x) \in \{c\}\Big\} = \varphi_w^{-1}\Big[\,\{c\}\,\Big].$$

La función φ_w continua, y $\{c\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, la preimagen es un conjunto cerrado.

Plan

¿Qué pasa cuando movemos un punto en la dirección w o $-w$?

Lema

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Entonces,

$$\langle x - \alpha w, w \rangle < \langle x, w \rangle < \langle x + \alpha w, w \rangle.$$

¿Qué pasa cuando movemos un punto en la dirección w o $-w$?

Lema

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Entonces,

$$\langle x - \alpha w, w \rangle < \langle x, w \rangle < \langle x + \alpha w, w \rangle.$$

Demostración.

¿Qué pasa cuando movemos un punto en la dirección w o $-w$?

Lema

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Entonces,

$$\langle x - \alpha w, w\rangle < \langle x, w\rangle < \langle x + \alpha w, w\rangle.$$

Demostración. Demostremos la segunda desigualdad (la primera es similar).

$$\langle x + \alpha w\rangle$$

¿Qué pasa cuando movemos un punto en la dirección w o $-w$?

Lema

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Entonces,

$$\langle x - \alpha w, w \rangle < \langle x, w \rangle < \langle x + \alpha w, w \rangle.$$

Demostración. Demostremos la segunda desigualdad (la primera es similar).

$$\langle x + \alpha w \rangle =$$

¿Qué pasa cuando movemos un punto en la dirección w o $-w$?

Lema

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Entonces,

$$\langle x - \alpha w, w \rangle < \langle x, w \rangle < \langle x + \alpha w, w \rangle.$$

Demostración. Demostremos la segunda desigualdad (la primera es similar).

$$\langle x + \alpha w \rangle = \langle x, w \rangle + \alpha \langle w, w \rangle$$

¿Qué pasa cuando movemos un punto en la dirección w o $-w$?

Lema

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Entonces,

$$\langle x - \alpha w, w\rangle < \langle x, w\rangle < \langle x + \alpha w, w\rangle.$$

Demostración. Demostremos la segunda desigualdad (la primera es similar).

$$\langle x + \alpha w\rangle = \langle x, w\rangle + \alpha\langle w, w\rangle >$$

¿Qué pasa cuando movemos un punto en la dirección w o $-w$?

Lema

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Entonces,

$$\langle x - \alpha w, w\rangle < \langle x, w\rangle < \langle x + \alpha w, w\rangle.$$

Demostración. Demostremos la segunda desigualdad (la primera es similar).

$$\langle x + \alpha w\rangle = \langle x, w\rangle + \alpha\langle w, w\rangle > \langle x, w\rangle.$$

¿Qué pasa cuando movemos un punto en la dirección w o $-w$?

Lema

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Entonces,

$$\langle x - \alpha w, w\rangle < \langle x, w\rangle < \langle x + \alpha w, w\rangle.$$

Demostración. Demostremos la segunda desigualdad (la primera es similar).

$$\langle x + \alpha w\rangle = \langle x, w\rangle + \alpha\langle w, w\rangle > \langle x, w\rangle.$$

La última desigualdad estricta es debida a la suposición que $w \neq \mathbf{0}$.

La cerradura del semiespacio abierto

Proposición

$\mathrm{cl}(S_{w,c,>}) = S_{w,c,\geq}$.

La cerradura del semiespacio abierto

Proposición

$\mathrm{cl}(S_{w,c,>}) = S_{w,c,\geq}$.

Demostración, $\subseteq$.

La cerradura del semiespacio abierto

Proposición

$\mathrm{cl}(S_{w,c,>}) = S_{w,c,\geq}$.

Demostración, $\subseteq$.

Como $S_{w,c,>} \subseteq S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,\geq}$ es cerrado, obtenemos que

$$\mathrm{cl}(S_{w,c,>}) \subseteq S_{w,c,\geq}.$$

Demostración, $S_{w,c,\geq} \subseteq \mathrm{cl}(S_{w,c,>})$

Sea $x \in S_{w,c,\geq}$.

Demostración, $S_{w,c,\geq} \subseteq \mathrm{cl}(S_{w,c,>})$

Sea $x \in S_{w,c,\geq}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, definimos

$$y_k := x + \frac{1}{k} w.$$

Demostración, $S_{w,c,\geq} \subseteq \mathrm{cl}(S_{w,c,>})$

Sea $x \in S_{w,c,\geq}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, definimos

$$y_k := x + \frac{1}{k} w.$$

Por el lema, $\langle y_k, w \rangle > \langle x, w \rangle \geq c$.

Demostración, $S_{w,c,\geq} \subseteq \mathrm{cl}(S_{w,c,>})$

Sea $x \in S_{w,c,\geq}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, definimos

$$y_k := x + \frac{1}{k} w.$$

Por el lema, $\langle y_k, w \rangle > \langle x, w \rangle \geq c$.

Hemos demostrado que $y_k \in S_{w,c,>}$, para todo k en $\mathbb{N}$.

Demostración, $S_{w,c,\geq} \subseteq \mathrm{cl}(S_{w,c,>})$

Sea $x \in S_{w,c,\geq}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, definimos

$$y_k := x + \frac{1}{k} w.$$

Por el lema, $\langle y_k, w \rangle > \langle x, w \rangle \geq c$.

Hemos demostrado que $y_k \in S_{w,c,>}$, para todo k en $\mathbb{N}$.

Mostremos que $y_k \to x$ cuando $k \to \infty$:

$$\|y_k - x\| = \left\| x + \frac{1}{k} w - x \right\| = \frac{1}{k} \|w\| \to 0.$$

Demostración, $S_{w,c,\geq} \subseteq \mathrm{cl}(S_{w,c,>})$

Sea $x \in S_{w,c,\geq}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, definimos

$$y_k := x + \frac{1}{k} w.$$

Por el lema, $\langle y_k, w \rangle > \langle x, w \rangle \geq c$.

Hemos demostrado que $y_k \in S_{w,c,>}$, para todo k en $\mathbb{N}$.

Mostremos que $y_k \to x$ cuando $k \to \infty$:

$$\|y_k - x\| = \left\| x + \frac{1}{k} w - x \right\| = \frac{1}{k} \|w\| \to 0.$$

Concluimos que $x \in \mathrm{cl}(S_{w,c,>})$.

El interior del semiespacio cerrado

Proposición

$\mathrm{int}(S_{w,c,\geq}) = S_{w,c,>}$.

El interior del semiespacio cerrado

Proposición

$\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) = S_{w,c,>}$.

Demostración, $\supseteq$.

El interior del semiespacio cerrado

Proposición

$\mathrm{int}(S_{w,c,\geq}) = S_{w,c,>}$.

Demostración, $\supseteq$.

Como $S_{w,c,>} \subseteq S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,>}$ es abierto, obtenemos que

El interior del semiespacio cerrado

Proposición

$\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) = S_{w,c,>}$.

Demostración, $\supseteq$.

Como $S_{w,c,>} \subseteq S_{w,c,\geq}$ y $S_{w,c,>}$ es abierto, obtenemos que

$$S_{w,c,>} \subseteq \operatorname{int}(S_{w,c,\geq}).$$

Demostración, $\mathrm{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \mathrm{int}(S_{w,c,\geq})$.

Demostración, $\mathrm{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \mathrm{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x,r)$:

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x,r)$:

$$\|x - y\|$$

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|}w.$$

Mostremos que $y \in B(x, r)$:

$$\|x - y\| =$$

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x,r)$:

$$\|x - y\| = \left\| x - x + \frac{r}{2\|w\|} w \right\|$$

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$.   Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x,r)$:

$$\|x - y\| = \left\| x - x + \frac{r}{2\|w\|} w \right\| =$$

Demostración, $\mathrm{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \mathrm{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x,r)$:

$$\|x - y\| = \left\| x - x + \frac{r}{2\|w\|} w \right\| = \frac{r}{2\|w\|} \|w\|$$

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x, r)$:

$$\|x - y\| = \left\| x - x + \frac{r}{2\|w\|} w \right\| = \frac{r}{2\|w\|} \|w\| =$$

Demostración, $\mathrm{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \mathrm{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x,r)$:

$$\|x - y\| = \left\| x - x + \frac{r}{2\|w\|} w \right\| = \frac{r}{2\|w\|} \|w\| = \frac{r}{2}$$

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x,r)$:

$$\|x - y\| = \left\| x - x + \frac{r}{2\|w\|} w \right\| = \frac{r}{2\|w\|} \|w\| = \frac{r}{2} <$$

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x, r)$:

$$\|x - y\| = \left\| x - x + \frac{r}{2\|w\|} w \right\| = \frac{r}{2\|w\|} \|w\| = \frac{r}{2} < r.$$

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x,r)$:

$$\|x - y\| = \left\| x - x + \frac{r}{2\|w\|} w \right\| = \frac{r}{2\|w\|} \|w\| = \frac{r}{2} < r.$$

Luego $\langle y, w \rangle \geq c$.

Por otro lado, por el lema, $\langle y, w \rangle < \langle x, w \rangle$.

Demostración, $\operatorname{int}(S_{w,c,\geq}) \subseteq S_{w,c,>}$

Sea $x \in \operatorname{int}(S_{w,c,\geq})$. Existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq S_{w,c,\geq}$.

$$y := x - \frac{r}{2\|w\|} w.$$

Mostremos que $y \in B(x,r)$:

$$\|x - y\| = \left\| x - x + \frac{r}{2\|w\|} w \right\| = \frac{r}{2\|w\|} \|w\| = \frac{r}{2} < r.$$

Luego $\langle y, w \rangle \geq c$.

Por otro lado, por el lema, $\langle y, w \rangle < \langle x, w \rangle$.

Concluimos que $\langle x, w \rangle > c$, esto es, $x \in S_{w,c,>}$.

Ejercicios

Demostrar que

$$\operatorname{cl}(S_{w,c,<}) = S_{w,c,\leq}, \qquad \operatorname{int}(S_{w,c,\leq}) = S_{w,c,<}.$$

Plan

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración.

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Si $\lambda = 0$, entonces

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0,1]$.

Si $\lambda = 0$, entonces

$$(1-\lambda)x + \lambda y$$

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Si $\lambda = 0$, entonces

$$(1 - \lambda)x + \lambda y =$$

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Si $\lambda = 0$, entonces

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = x \in S_{w,c,>}.$$

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0,1]$.

Si $\lambda = 0$, entonces

$$(1-\lambda)x + \lambda y = x \in S_{w,c,>}.$$

Análogamente, si $\lambda = 1$, entonces

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0,1]$.

Si $\lambda = 0$, entonces

$$(1-\lambda)x + \lambda y = x \in S_{w,c,>}.$$

Análogamente, si $\lambda = 1$, entonces

$$(1-\lambda)x + \lambda y$$

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Si $\lambda = 0$, entonces

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = x \in S_{w,c,>}.$$

Análogamente, si $\lambda = 1$, entonces

$$(1 - \lambda)x + \lambda y =$$

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0,1]$.

Si $\lambda = 0$, entonces

$$(1-\lambda)x + \lambda y = x \in S_{w,c,>}.$$

Análogamente, si $\lambda = 1$, entonces

$$(1-\lambda)x + \lambda y = y \in S_{w,c,>}.$$

Los semiespacios abiertos son convexos

Proposición

$S_{w,c,>}$ es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_{w,c,>}$ y $\lambda \in [0,1]$.

Si $\lambda = 0$, entonces

$$(1-\lambda)x + \lambda y = x \in S_{w,c,>}.$$

Análogamente, si $\lambda = 1$, entonces

$$(1-\lambda)x + \lambda y = y \in S_{w,c,>}.$$

Nos falta considerar el caso principal, $0 < \lambda < 1$.

Demostración, el caso principal: $0 < \lambda < 1$

Suposiciones

$x \in S_{w,c,>}$ | $0 < \lambda < 1$ | $y \in S_{w,c,>}$

Demostración, el caso principal: $0 < \lambda < 1$

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{x \in S_{w,c,>}} & \qquad & \boxed{0 < \lambda < 1} & \qquad & \boxed{y \in S_{w,c,>}} \\ \downarrow & & & & \\ \boxed{\langle x, w \rangle > c} & & & & \end{array}$$

Suposiciones

Demostración, el caso principal: $0 < \lambda < 1$

Suposiciones

$x \in S_{w,c,>}$ | $0 < \lambda < 1$ | $y \in S_{w,c,>}$

$$x \in S_{w,c,>} \longrightarrow \langle x, w \rangle > c$$

$$0 < \lambda < 1 \longrightarrow 1 - \lambda > 0$$

Demostración, el caso principal: $0 < \lambda < 1$

Suposiciones

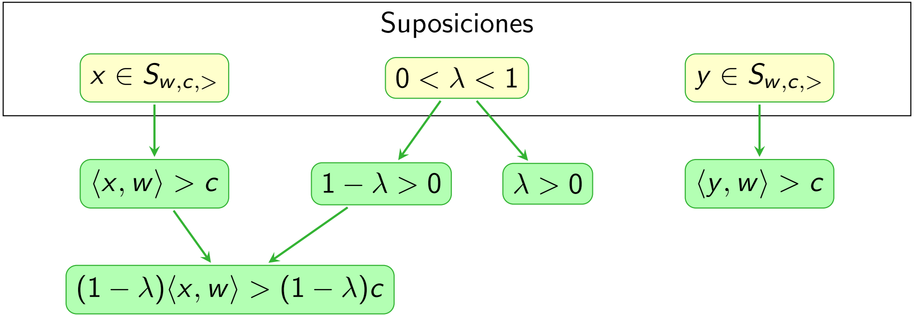
$$
\begin{tikzcd}
x \in S_{w,c,>} \arrow[d] & & 0 < \lambda < 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & y \in S_{w,c,>} \\
\langle x, w \rangle > c & 1 - \lambda > 0 & & \lambda > 0 &
\end{tikzcd}
$$

Demostración, el caso principal: $0 < \lambda < 1$

Suposiciones

$$\begin{tikzcd}
x \in S_{w,c,>} \arrow[d] & & 0 < \lambda < 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & y \in S_{w,c,>} \arrow[d] \\
\langle x, w \rangle > c & 1 - \lambda > 0 & & \lambda > 0 & \langle y, w \rangle > c
\end{tikzcd}$$

Demostración, el caso principal: $0 < \lambda < 1$



Demostración, el caso principal: $0 < \lambda < 1$

Suposiciones

$$
\begin{tikzcd}
x \in S_{w,c,>} \arrow[d] & 0 < \lambda < 1 \arrow[d] \arrow[dr] & & y \in S_{w,c,>} \arrow[d] \\
\langle x, w\rangle > c \arrow[d] & 1 - \lambda > 0 \arrow[dl] & \lambda > 0 \arrow[dr] & \langle y, w\rangle > c \arrow[d] \\
(1-\lambda)\langle x, w\rangle > (1-\lambda)c & & & \lambda\langle y, w\rangle > \lambda c
\end{tikzcd}
$$

Demostración, el caso principal: $0 < \lambda < 1$

Suposiciones

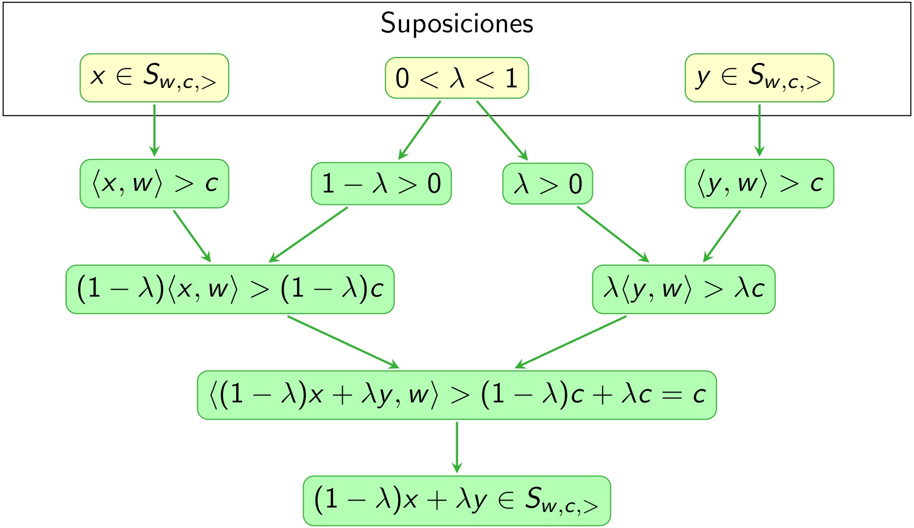
$x \in S_{w,c,>}$ $\quad$ $0 < \lambda < 1$ $\quad$ $y \in S_{w,c,>}$

$\langle x, w \rangle > c$ $\quad$ $1 - \lambda > 0$ $\quad$ $\lambda > 0$ $\quad$ $\langle y, w \rangle > c$

$(1-\lambda)\langle x, w \rangle > (1-\lambda)c$ $\quad$ $\lambda \langle y, w \rangle > \lambda c$

$\langle (1-\lambda)x + \lambda y, w \rangle > (1-\lambda)c + \lambda c = c$

Demostración, el caso principal: $0 < \lambda < 1$



Los semiespacios cerrados son convexos

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ es convexo.

Los semiespacios cerrados son convexos

Proposición

$S_{w,c,\geq}$ es convexo.

Demostración: ejercicio.