La distancia de un punto a un hiperplano

Elisa Suarez Barraza, Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

21 de junio de 2023

Objetivos

Dados $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $c \in \mathbb{R}$,
denotamos por $S_{w,c,=}$ al hiperplano determinado por w y c:

$$S_{w,c,=} := \Big\{ v \in \mathbb{R}^n \colon \; \langle v, w \rangle = c \Big\}.$$

Vamos a demostrar la siguiente fórmula.

Proposición

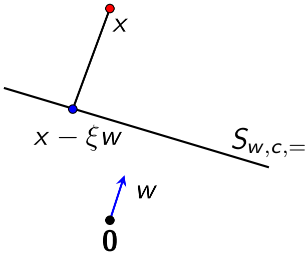
Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$d(x, S_{w,c,=}) = \frac{|\langle x, w \rangle - c|}{\|w\|}.$$

Proyectamos x sobre $S_{w,c,=}$

Lema 1

$$x - \xi w \in S_{w,c,=} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi = \frac{\langle x, w\rangle - c}{\|w\|^2}.$$



Demostración

Demostración

Encontremos ξ en $\mathbb{R}$ tal que $x - \xi w \in S_{w,c,=}$.

Demostración

Encontremos ξ en $\mathbb{R}$ tal que $x - \xi w \in S_{w,c,=}$.

$$x - \xi w \in S_{w,c,=} \quad \Longleftrightarrow$$

Demostración

Encontremos ξ en $\mathbb{R}$ tal que $x - \xi w \in S_{w,c,=}$.

$$x - \xi w \in S_{w,c,=} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x - \xi w, w \rangle = c$$

Demostración

Encontremos ξ en $\mathbb{R}$ tal que $x - \xi w \in S_{w,c,=}$.

$$x - \xi w \in S_{w,c,=} \quad \iff \quad \langle x - \xi w, w \rangle = c \quad \iff$$

Demostración

Encontremos ξ en $\mathbb{R}$ tal que $x - \xi w \in S_{w,c,=}$.

$$x - \xi w \in S_{w,c,=} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x - \xi w, w \rangle = c \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, w \rangle - \xi \langle w, w \rangle = c.$$

Demostración

Encontremos ξ en $\mathbb{R}$ tal que $x - \xi w \in S_{w,c,=}$.

$$x - \xi w \in S_{w,c,=} \quad\iff\quad \langle x - \xi w, w\rangle = c \quad\iff\quad \langle x, w\rangle - \xi\langle w, w\rangle = c.$$

Despejamos ξ:

Demostración

Encontremos ξ en $\mathbb{R}$ tal que $x - \xi w \in S_{w,c,=}$.

$$x - \xi w \in S_{w,c,=} \quad \iff \quad \langle x - \xi w, w \rangle = c \quad \iff \quad \langle x, w \rangle - \xi \langle w, w \rangle = c.$$

Despejamos ξ:

$$\xi = \frac{\langle x, w \rangle - c}{\|w\|^2}.$$

Proyectamos x sobre $S_{w,c,=}$

Lema 2

$$\xi := \frac{\langle x, w \rangle - c}{\|w\|^2}, \qquad y := x - \xi w.$$

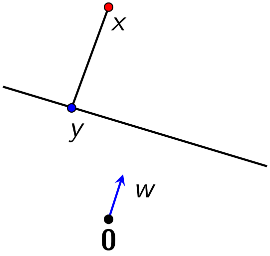
Entonces, y es el punto en $S_{w,c,=}$ más cercano a x.

Proyectamos x sobre $S_{w,c,=}$

Lema 2

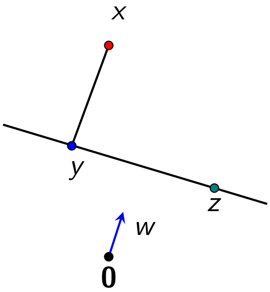
$$\xi := \frac{\langle x, w\rangle - c}{\|w\|^2}, \qquad y := x - \xi w.$$

Entonces, y es el punto en $S_{w,c,=}$ más cercano a x.

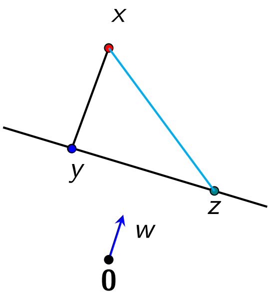


Demostración, inicio

Sea $z \in S_{w,c,=}$.



Demostración, inicio

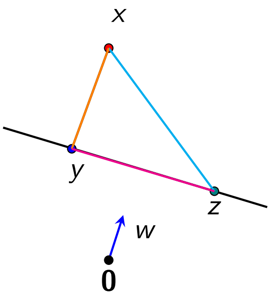


Sea $z \in S_{w,c,=}$.

Descomponemos el vector $x - z$ en dos sumandos:

.

Demostración, inicio



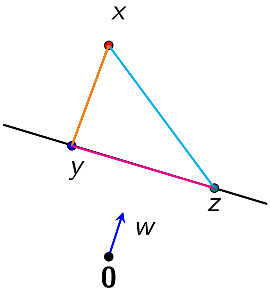
Sea $z \in S_{w,c,=}$.

Descomponemos el vector $x - z$ en dos sumandos:

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

.

Demostración, inicio



Sea $z \in S_{w,c,=}$.

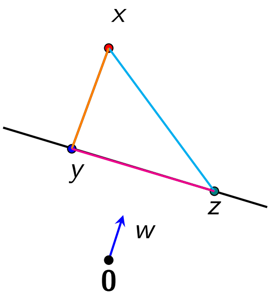
Descomponemos el vector $x - z$ en dos sumandos:

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

Notemos que

$$\langle y - z, w \rangle = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Demostración, inicio



Sea $z \in S_{w,c,=}$.

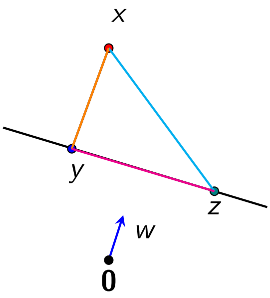
Descomponemos el vector $x - z$ en dos sumandos:

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

Notemos que

$$\langle y - z, w \rangle = \langle y, w \rangle - \langle z, w \rangle \qquad .$$

Demostración, inicio



Sea $z \in S_{w,c,=}$.

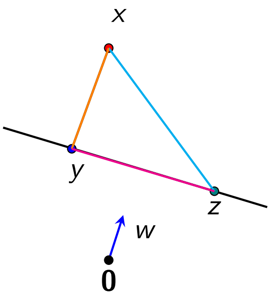
Descomponemos el vector $x - z$ en dos sumandos:

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

Notemos que

$$\langle y - z, w \rangle = \langle y, w \rangle - \langle z, w \rangle = \qquad\qquad .$$

Demostración, inicio



Sea $z \in S_{w,c,=}$.

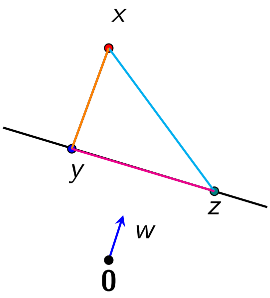
Descomponemos el vector $x - z$ en dos sumandos:

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

Notemos que

$$\langle y - z, w \rangle = \langle y, w \rangle - \langle z, w \rangle = c - c \qquad .$$

Demostración, inicio



Sea $z \in S_{w,c,=}$.

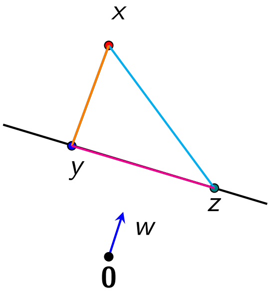
Descomponemos el vector $x - z$ en dos sumandos:

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

Notemos que

$$\langle y - z, w \rangle = \langle y, w \rangle - \langle z, w \rangle = c - c = \quad .$$

Demostración, inicio



Sea $z \in S_{w,c,=}$.

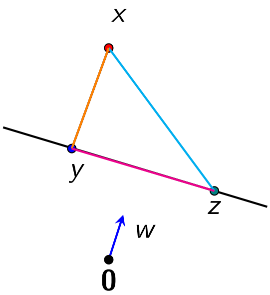
Descomponemos el vector $x - z$ en dos sumandos:

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

Notemos que

$$\langle y - z, w \rangle = \langle y, w \rangle - \langle z, w \rangle = c - c = 0.$$

Demostración, inicio



Sea $z \in S_{w,c,=}$.

Descomponemos el vector $x - z$ en dos sumandos:

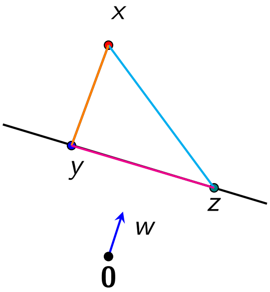
$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

Notemos que

$$\langle y - z, w \rangle = \langle y, w \rangle - \langle z, w \rangle = c - c = 0.$$

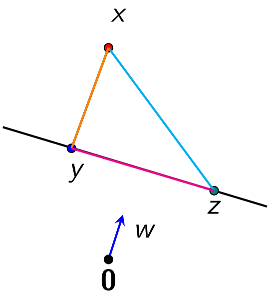
Hemos mostrado que $y - z \perp w$.

Demostración, final



Hemos mostrado que $y - z \perp w$.

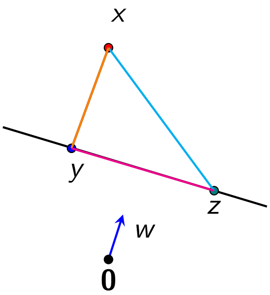
Demostración, final



Hemos mostrado que $y - z \perp w$.

Por otra parte, $x - y = \xi w \in \mathbb{R}w$.

Demostración, final



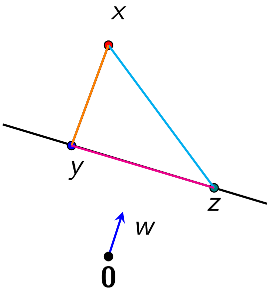
Hemos mostrado que $y - z \perp w$.

Por otra parte, $x - y = \xi w \in \mathbb{R}w$.

Por los dos hechos anteriores,

$$x - y \perp y - z.$$

Demostración, final



Hemos mostrado que $y - z \perp w$.

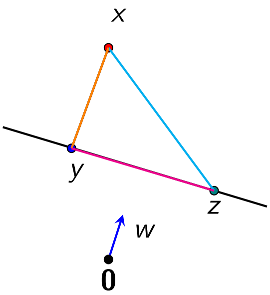
Por otra parte, $x - y = \xi w \in \mathbb{R}w$.

Por los dos hechos anteriores,

$$x - y \perp y - z.$$

Luego, por el Teorema de Pitágoras,

Demostración, final



Hemos mostrado que $y - z \perp w$.

Por otra parte, $x - y = \xi w \in \mathbb{R}w$.

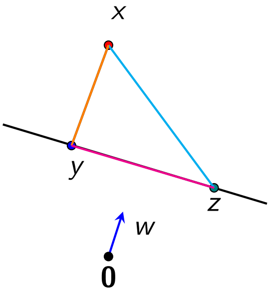
Por los dos hechos anteriores,

$$x - y \perp y - z.$$

Luego, por el Teorema de Pitágoras,

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$$

Demostración, final



Hemos mostrado que $y - z \perp w$.

Por otra parte, $x - y = \xi w \in \mathbb{R}w$.

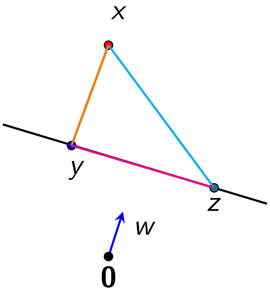
Por los dos hechos anteriores,

$$x - y \perp y - z.$$

Luego, por el Teorema de Pitágoras,

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq$$

Demostración, final



Hemos mostrado que $y - z \perp w$.

Por otra parte, $x - y = \xi w \in \mathbb{R}w$.

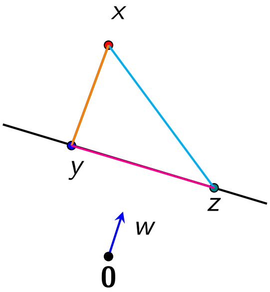
Por los dos hechos anteriores,

$$x - y \perp y - z.$$

Luego, por el Teorema de Pitágoras,

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|.$$

Demostración, final



Hemos mostrado que $y - z \perp w$.

Por otra parte, $x - y = \xi w \in \mathbb{R}w$.

Por los dos hechos anteriores,

$$x - y \perp y - z.$$

Luego, por el Teorema de Pitágoras,

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|.$$

Como z fue arbitrario, se concluye lo deseado.

Resultado principal

Proposición

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$d(x, S_{w,c,=}) = \frac{|\langle x, w\rangle - c|}{\|w\|}.$$

Resultado principal

Proposición

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$d(x, S_{w,c,=}) = \frac{|\langle x, w\rangle - c|}{\|w\|}.$$

Demostración.

Resultado principal

Proposición

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$d(x, S_{w,c,=}) = \frac{|\langle x, w\rangle - c|}{\|w\|}.$$

Demostración.

$$\operatorname{dist}(x, S_{w,c,=}) = \|x - y\|$$

Resultado principal

Proposición

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$d(x, S_{w,c,=}) = \frac{|\langle x, w \rangle - c|}{\|w\|}.$$

Demostración.

$$\operatorname{dist}(x, S_{w,c,=}) = \|x - y\| = \|\xi w\| = |\xi| \, \|w\|$$

Resultado principal

Proposición

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$d(x, S_{w,c,=}) = \frac{|\langle x, w \rangle - c|}{\|w\|}.$$

Demostración.

$$\operatorname{dist}(x, S_{w,c,=}) = \|x - y\| = \|\xi w\| = |\xi| \, \|w\| = \frac{|\langle x, w \rangle - c|}{\langle w, w \rangle} \|w\|$$

Resultado principal

Proposición

Sean $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$d(x, S_{w,c,=}) = \frac{|\langle x, w\rangle - c|}{\|w\|}.$$

Demostración.

$$\operatorname{dist}(x, S_{w,c,=}) = \|x - y\| = \|\xi w\| = |\xi|\,\|w\| = \frac{|\langle x, w\rangle - c|}{\langle w, w\rangle}\|w\| = \frac{|\langle x, w\rangle - c|}{\|w\|}.$$