Representaciones lineales de grupos finitos: definiciones y ejemplos

Egor Maximenko y Evelyn Sánchez Dorantes

https://esfm.egormaximenko.com

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México

4 de octubre de 2026

Representaciones lineales de grupos finitos

Sea G un grupo finito.

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

Denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ al grupo de los operadores lineales invertibles $V \to V$.

Una representación lineal de G en V es un homomorfismo $G \to \mathrm{GL}(V)$.

En lo que sigue, decimos "representación" en vez de "representación lineal".

La imagen del elemento neutro

$1_G :=$ el elemento neutro de G.

$I_V :=$ el operador identidad $V \to V$.

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación, entonces

$$\rho(1_G) = I_V.$$

Demostración

Notemos que

$$\rho(1_G) = \rho(1_G 1_G) = \rho(1_G)\rho(1_G).$$

$\rho(1_G) \in \mathrm{GL}(V)$, es decir, es invertible.

Multiplicando la igualdad anterior por $\rho(1_G)^{-1}$ obtenemos

$$I_V = \rho(1_G)\rho(1_G)^{-1} = (\rho(1_G)\rho(1_G))\rho(1_G)^{-1} = \rho(1_G)(\rho(1_G)\rho(1_G)^{-1}) = \rho(1_G)I_V,$$

teniendo así lo deseado.

Representaciones fieles

Una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ se llama **fiel** si ρ es inyectiva.

En otras palabras, ρ es fiel si ρ es un monomorfismo de grupos.

Proposición

$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es fiel $\iff$ $\ker(\rho) = \{1_G\}$.

Se sigue del criterio general de monomorfismos de grupos.

Ejemplo: la representación trivial de un grupo en un espacio vectorial

Sea G un grupo y sea V un espacio vectorial complejo.

Para cada g en G, definimos $\rho(g)\colon V \to V$,

$$\rho(g) \coloneqq I_V.$$

ρ es una representación.

En efecto, para cada g, h en G,

$$\rho(gh) = I_V = I_V I_V = \rho(g)\rho(h).$$

Si $G \neq \{1_G\}$, entonces ρ no es fiel.

Ejemplo: una representación de un grupo de dos elementos

Sea G_2 el conjunto $\{0, 1\}$ con la operación dada mediante la siguiente tabla:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

.

Definimos $\rho\colon G_2 \to \mathrm{GL}(V)$,

$$\rho(k) := (-1)^k I_V.$$

Ejemplo: una representación de un grupo de dos elementos

Mostremos que ρ es una representación.

$$\rho(0+0) = \rho(0) = I_V = I_V I_V = \rho(0)\rho(0),$$

$$\rho(0+1) = \rho(1) = -I_V = I_V(-I_V) = \rho(0)\rho(1),$$

$$\rho(1+0) = \rho(1) = -I_V = (-I_V)I_V = \rho(1)\rho(0),$$

$$\rho(1+1) = \rho(0) = I_V = (-I_V)(-I_V) = \rho(1)\rho(1).$$

Si $\dim(V) \geq 1$, entonces $\rho(1) \neq \rho(0)$ y ρ es fiel.