

Representaciones de grupos finitos en espacios vectoriales complejos de dimensión finita

Objetivos. Estudiar la definición y unos ejemplos.

Prerrequisitos. Operadores lineales invertibles en espacios vectoriales de dimensión finita, grupos.

Repaso 1. Dado un espacio vectorial complejo V de dimensión finita, denotamos por $\text{GL}(V)$ al conjunto de todos los operadores lineales invertibles $V \rightarrow V$. Sabemos que $\text{GL}(V)$ es un grupo.

Definición 2 (representación lineal de grupo). Sea G un grupo finito y sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Una *representación lineal* de G es un homomorfismo $G \rightarrow \text{GL}(V)$. En otras palabras, una función $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación de G en V , si para cualesquier a, b en G ,

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b).$$

En lo que sigue, en vez de *representación lineal*, decimos simplemente *representación*.

Notación 3. Dado un grupo G , denotamos por 1_G al elemento neutro de G . Dado un espacio vectorial V , denotamos por I_V al operador identidad $V \rightarrow V$.

Proposición 4. Si ρ es una representación de G en V , entonces $\rho(1_G) = I_V$.

Demostración. Es una propiedad general de homomorfismos de grupos. Repasemos la demostración para nuestra situación. Como $1_G 1_G = 1_G$, tenemos que

$$\rho(1_G)\rho(1_G) = \rho(1_G 1_G) = \rho(1_G).$$

Por la definición, ρ toma valores en $\text{GL}(V)$, así que $\rho(1_G)$ es un operador lineal invertible. Multiplicando ambos lados de la igualdad $\rho(1_G)\rho(1_G) = \rho(1_G)$ por $\rho(1_G)^{-1}$ obtenemos que $\rho(1_G) = I_V$. $\square$

Observación 5 (la invertibilidad de los valores de ρ se puede deducir de la suposición $\rho(1_G) = I_V$). Veamos una variación equivalente de la Definición 2. Igual que en la Definición 2, suponemos que G es un grupo finito y V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Denotemos por $\text{End}(V)$ al conjunto de todos los operadores lineales $V \rightarrow V$. Sabemos $\text{End}(V)$ es un álgebra compleja asociativa con identidad. En particular, respecto a la operación de multiplicación de operadores, $\text{End}(V)$ es un monoide. Si suponemos que $\rho: G \rightarrow \text{End}(V)$ es un homomorfismo de monoides, es decir,

$$\forall a, b \in G \quad \rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$$

y

$$\rho(1_G) = I_V,$$

entonces, para cada g en G , tenemos que

$$\rho(g)\rho(g^{-1}) = \rho(gg^{-1}) = \rho(1_G) = I_V, \quad \rho(g^{-1})\rho(g) = \rho(g^{-1}g) = \rho(1_G) = I_V,$$

así que $\rho(g)$ es un operador lineal invertible. En otras palabras, suponiendo que $\rho: G \rightarrow \text{End}(V)$ sea un homomorfismo de monoides, llegamos a la conclusión que los valores de ρ pertenecen a $\text{GL}(V)$.

Observación 6 (suposiciones adicionales para grupos infinitos y espacios vectoriales de dimensión infinita). La Definición 2 se puede dar para grupos generales G y espacios vectoriales generales V . Sin embargo, para demostrar teoremas fuertes (por ejemplo, la descomposición de representaciones en representaciones irreducibles), es importante suponer propiedades adicionales G y V . Por ejemplo, está bien desarrollada la teoría de representaciones unitarias fuertemente continuas, cuando G es un grupo localmente compacto, V es un espacio de Hilbert, los valores de ρ son operadores unitarios y para cada v en V la función $g \mapsto \rho(g)v$ es continua.

Ejemplo 7 (representación trivial). Sea G un grupo finito y sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Definimos $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$,

$$\rho(g) := I_V.$$

Entonces, ρ es una representación.

Ejemplo 8. Sea G_2 el conjunto $\{0, 1\}$ con la operación binaria definida mediante la siguiente tabla:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

.

Es fácil ver que G_2 es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Definimos $\rho: G_2 \rightarrow \text{GL}(V)$,

$$\rho(0) := I_V, \quad \rho(1) := -I_V.$$

Es fácil de ver que ρ es una representación.

Representaciones matriciales

Observación 9. Dado n en $\mathbb{N}$, denotemos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ al conjunto de todas las matrices complejas cuadradas $n \times n$. Sabemos que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es un álgebra compleja asociativa con identidad. A cada matriz A le asociamos el operador lineal $M_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$,

$$M_A(v) := Av.$$

Sabemos que la función $A \mapsto M_A$ es un isomorfismo de álgebras complejas $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\text{End}(\mathbb{C}^n)$. Bajo este isomorfismo, Denotemos por $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ al grupo de las matrices complejas invertibles de orden n . Los grupos $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ y $\text{GL}(\mathbb{C}^n)$ son isomorfos bajo el isomorfismo $A \mapsto M_A$.

Definición 10 (representación matricial de un grupo finito). Sea G un grupo finito y sea $n \in \mathbb{N}$. Una *representación matricial* de G de grado n es un homomorfismo $G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$.

Observación 11. Si identificamos $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ con $\text{GL}(\mathbb{C}^n)$, entonces las representaciones matriciales se pueden ver como un caso particular de representaciones lineales en el sentido de la Definición 2.

Ejemplos

Ejemplo 12. Sea G_3 el conjunto $\{0, 1, 2\}$ con la operación binaria definida mediante la siguiente tabla:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Es fácil ver que G_3 es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_3 := \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$. Definimos $\rho: G_3 \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$,

$$\rho(k) := A^k, \quad \text{donde} \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: verificar que $A^3 = I_2$ y demostrar que ρ es una representación.

Ejemplo 13. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea G_n el conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ con la operación binaria

$$a \oplus b := \begin{cases} a + b, & a + b < n; \\ a + n - n, & a + b \geq n. \end{cases}$$

Es fácil ver que G_n es un grupo isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$. Sea

$$\varepsilon_n := \exp \frac{2\pi i}{n}.$$

Sabemos que $\varepsilon_n^k = 1$ si, y sólo si, $n \mid k$. Definimos $\rho: G_n \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C})$,

$$\rho(k) := [\varepsilon_n^k].$$

Ejercicio: verificar que ρ es una representación.

Ejemplo 14. Sea G_n el grupo del ejemplo anterior. Definimos $\rho: G_n \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$,

$$\rho(k) := A^k, \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_n^k \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: verificar que ρ es una representación.