Representaciones lineales de grupos finitos: definiciones y ejemplos (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko, con ayuda de Victor Hugo Hernandez Macias
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

10 de febrero de 2026

Objetivos de este tema

- introducir el concepto de representación lineal;
- conocer una clase de ejemplos: representaciones matriciales regulares;
- introducir el concepto de subespacio invariante;
- introducir el concepto de subrepresentación.
- introducir el concepto de mapeo G-lineal;

Prerrequisitos para este tema

- conceptos básicos de álgebra lineal;
- conceptos básicos de la teoría de grupos;
- optativo: teoría de módulos.

Prerrequisitos para este tema

- conceptos básicos de álgebra lineal;
- conceptos básicos de la teoría de grupos;
- optativo: teoría de módulos.

Para estudiar representaciones unitarias fuertemente continuas de grupos localmente compactos topológicos en espacios de Hilbert, también se necesitan conceptos de topología y de análisis funcional.

Bibliografía: los primeros trabajos clásicos

Ferdinand Georg Frobenius (1896, 1897):

Über vertauschbare Matrizen (1896).

Über Gruppencharaktere (1896).

Über die Primfactoren der Gruppendeterminante (1896).

Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen (1897).

Issai Schur (1905):

Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere.

Bibliografía: algunos libros conocidos

- William Fulton, Joe Harris (1991):
  Representation theory: a first course.
- Gordon Douglas James, Matin W. Liebeck (2001):
  Representations and characters of groups, 2nd ed.
- Alexandr A. Kirillov (1976):
  Elements of the theory of representation.
- Jean-Pierre Serre (1977):
  Linear representations of finite groups.
- Peter Webb (2016):
  A course in finite group representation theory.

Representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos
y solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dado un espacio vectorial V, denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ al grupo de sus automorfismos (isomorfismos $V \to V$).

Una representación lineal de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

Vamos a trabajar solamente con representaciones lineales,
por eso decimos simplemente representación.

Si $\dim(V) = n$, se dice que n es el grado de la representación ρ.

Una subclase de representaciones: representaciones matriciales

Para $V = \mathbb{C}^n$, el grupo $\mathrm{GL}(V)$ se identifica con $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
En otras palabras, los operadores lineales invertibles $V \to V$
se identifican con matrices invertibles de clase $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Una representación matricial de G de grado n es un homeomorfismo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Ejemplo: representación de $\mathbb{Z}_n$ como matrices de rotación

$G = \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, $V = \mathbb{C}^2$,

$$\rho(k + n\mathbb{Z}) := \begin{bmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{bmatrix}.$$

Se puede ver que la definición es consistente:

si $j - k \in n\mathbb{Z}$, entonces j y k dan la misma matriz.

Ejemplo: representación de $\mathbb{Z}_n$ como matrices de rotación

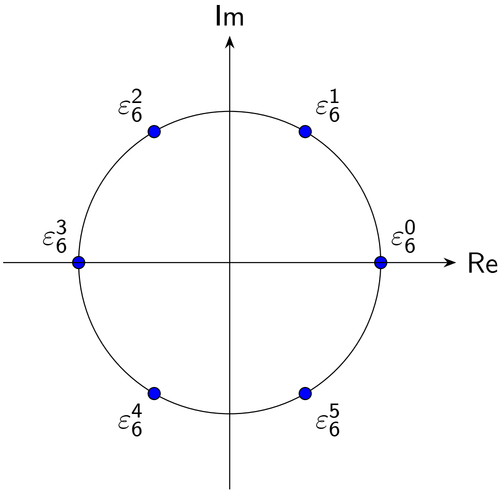
$G = \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, $V = \mathbb{C}^2$,

$$\rho(k + n\mathbb{Z}) := \begin{bmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{bmatrix}.$$

Se puede ver que la definición es consistente:
si $j - k \in n\mathbb{Z}$, entonces j y k dan la misma matriz.

Ejercicio: demostrar la propiedad $\rho(a + b) = \rho(a)\rho(b)$.
Es un caso particular de la regla de multiplicación de matrices de rotación.

Ejemplo: representación de $\mathbb{Z}_n$ como raíces de la unidad



Sean $n \in \mathbb{N}$, $G = \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$,
$V = \mathbb{C}^1$,

$$\varepsilon_n := \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathbb{Z}_n \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$,

$$\varphi(k + n\mathbb{Z}) := \varepsilon_n^k.$$

Ejercicio: la definición es consistente.

Ejemplo: representación trivial (principal)

Sea G un grupo y sea V un espacio vectorial.

Ejemplo: representación trivial (principal)

Sea G un grupo y sea V un espacio vectorial.

Denotamos por I al operador identidad $V \to V$:

$$Iv := v \qquad (v \in V).$$

Ejemplo: representación trivial (principal)

Sea G un grupo y sea V un espacio vectorial.

Denotamos por I al operador identidad $V \to V$:

$$Iv := v \qquad (v \in V).$$

Definimos $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V)$,

$$\tau(g) := I \qquad (g \in G).$$

Observación: pueden haber varias representaciones de G sobre V

Por ejemplo, si $G = \mathbb{Z}_3$ y $V = \mathbb{C}^2$, las siguientes dos representaciones son diferentes:

- $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := \begin{bmatrix} \cos\frac{2k\pi}{3} & -\sin\frac{2k\pi}{3} \\ \sin\frac{2k\pi}{3} & \cos\frac{2k\pi}{3} \end{bmatrix},$$

- $\tau \colon G \to \mathrm{GL}(V)$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, en muchos textos sobre la teoría de representaciones es común omitir ρ y solamente mencionar G y V.

Por ejemplo, es común usar la notación gv en vez de $\rho(g)v$.

Subclase de representaciones: representaciones regulares

Sean G un grupo de orden n, V un espacio vectorial de dimensión n, $(b_t)_{t\in G}$ una base de V.

Subclase de representaciones: representaciones regulares

Sean G un grupo de orden n, V un espacio vectorial de dimensión n, $(b_t)_{t\in G}$ una base de V.

Se define $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$,

$$\rho(g)\left(\sum_{t\in G} \alpha_t b_t\right) := \sum_{t\in G} \alpha_t b_{gt}.$$

Subclase de representaciones: representaciones regulares

Sean G un grupo de orden n, V un espacio vectorial de dimensión n, $(b_t)_{t \in G}$ una base de V.

Se define $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$,

$$\rho(g)\left(\sum_{t \in G} \alpha_t b_t\right) := \sum_{t \in G} \alpha_t b_{gt}.$$

En particular,

$$\rho(g) b_t = b_{gt}.$$

Recordatorio: convertir G en permutaciones de G

Proposición (construcción de Cayley)

Sea G un grupo. Para cada g en G, definimos $L_g \colon G \to G$,

$$L_g(t) \coloneqq gt.$$

Entonces,

- para cada g en G, L_g es una biyección, es decir, $L_g \in \mathrm{Sym}(G)$;
- la correspondencia $g \mapsto L_g$ es inyectiva;
- $\{L_g \colon \ g \in G\}$ es un subgrupo de G.

Demostración: ejercicio.

Otra fórmula explícita para una representación regular

Proposición

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación regular:

$$\rho(g)\left(\sum_{t\in G} \alpha_t b_t\right) := \sum_{t\in G} \alpha_t b_{gt}.$$

Entonces, para cada g en G,

$$\rho(g)\left(\sum_{t\in G} \alpha_t b_t\right) = \sum_{s\in G} \alpha_{g^{-1}s} b_s.$$

Otra fórmula explícita para una representación regular

Proposición

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación regular:

$$\rho(g)\left(\sum_{t\in G} \alpha_t b_t\right) := \sum_{t\in G} \alpha_t b_{gt}.$$

Entonces, para cada g en G,

$$\rho(g)\left(\sum_{t\in G} \alpha_t b_t\right) = \sum_{s\in G} \alpha_{g^{-1}s} b_s.$$

Demostración: usamos el cambio de variable $s = gt$.

Como hemos recordado, la correspondencia $t \mapsto gt$ es biyectiva.

Ejemplo

$G = \{e, a, b, c\}$,
con la siguiente regla de multiplicación:

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión 4.
Elegimos una base de V y la indexamos con elementos de G:

$$u_e, \quad u_a, \quad u_b, \quad u_c.$$

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ la representación regular correspondiente. Entonces, por ejemplo,

$$\rho(a)\big(\alpha_e u_e + \alpha_a u_a + \alpha_b u_b + \alpha_c u_c\big) = \alpha_e u_a + \alpha_a u_e + \alpha_b u_c + \alpha_c u_b.$$

Vamos a ver una forma matricial de representaciones regulares.

Necesitamos repasar el concepto de matrices de permutación.

Matrices de permutación

Dada una permutación σ en S_n, le asociamos la matriz de permutación:

$$P_\sigma := \left[\delta_{j,\sigma(k)}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Notamos que

$$j = \sigma(k) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sigma^{-1}(j) = k.$$

Por lo tanto,

$$P_\sigma = \left[\delta_{\sigma^{-1}(j),k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Matrices de permutación, ejemplo

$$P_\sigma = \left[\delta_{j,\sigma(k)}\right]_{j,k=1}^{n} = \left[\delta_{\sigma^{-1}(j),k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Ejemplo:

$$\sigma = (3,5,4,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrices de permutación y vectores de la base canónica

$$P_\sigma := \left[\delta_{j,\sigma(k)}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Proposición

Si $\sigma \in S_n$ y $q \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$P_\sigma e_q = e_{\sigma(q)}.$$

Demostración.

$$(P_\sigma e_q)_j = \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{j,k} (e_q)_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,\sigma(k)} \delta_{q,k} = \delta_{j,\sigma(q)} = (e_{\sigma(q)})_j.$$

El producto de dos matrices de permutación

Proposición

Si $\sigma, \tau \in S_n$, entonces

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}.$$

El producto de dos matrices de permutación

Proposición

Si $\sigma, \tau \in S_n$, entonces

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}.$$

Demostración. Para cada q en $\{1, \ldots, n\}$,

$$P_\sigma P_\tau e_q = P_\sigma e_{\tau(q)} = e_{\sigma(\tau(q))} = e_{(\sigma\tau)(q)} = P_{\sigma\tau} e_q.$$

Por lo tanto, la q-ésima columna de $P_\sigma P_\tau$ coincide con la q-ésima columna de $P_{\sigma\tau}$.
Como q es arbitrario, concluimos que estas dos matrices son iguales.

El producto de dos matrices de permutación

Proposición

Si $\sigma, \tau \in S_n$, entonces
$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}.$$

Demostración. Para cada q en $\{1, \ldots, n\}$,
$$P_\sigma P_\tau e_q = P_\sigma e_{\tau(q)} = e_{\sigma(\tau(q))} = e_{(\sigma\tau)(q)} = P_{\sigma\tau} e_q.$$

Por lo tanto, la q-ésima columna de $P_\sigma P_\tau$ coincide con la q-ésima columna de $P_{\sigma\tau}$.
Como q es arbitrario, concluimos que estas dos matrices son iguales.

Ejercicio: escribir una demostración directa, trabajando con $(P_\sigma P_\tau)_{j,k}$.

Las matrices de permutación y los vectores generales

Proposición

Si $\sigma \in S_n$ y $x \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$P_\sigma x = \left[x_{\sigma^{-1}(j)}\right]_{j=1}^{n}.$$

Las matrices de permutación y los vectores generales

Proposición

Si $\sigma \in S_n$ y $x \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$P_\sigma x = \left[x_{\sigma^{-1}(j)}\right]_{j=1}^{n}.$$

Demostración.

$$(P_\sigma x)_j = \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{j,k} x_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma^{-1}(j),k} x_k = x_{\sigma^{-1}(j)}.$$

Ejemplo: el producto de una matriz de permutación por un vector

Sean $n = 5$, $x \in \mathbb{C}^5$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso,

$$P_\sigma x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, $(P_\sigma x)_3 = x_5 = x_{\sigma^{-1}(3)}$.

Representaciones regulares matriciales

Sea G un subgrupo de S_n.

Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(g) := P_g.$$

De manera equivalente, podemos poner $V := \mathbb{C}^n$,

$$\rho(g)x := \left[x_{g^{-1}(k)}\right]_{k=1}^{n}.$$

Por las propiedades de matrices de permutación,

$$\rho(g)e_j = e_{g(j)}.$$

Ejemplo (pasamos de un grupo finito a un subgrupo de S_n)

Otra vez consideramos $G = \{e, a, b, c\}$, con la siguiente regla de multiplicación:

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Numeramos los elementos de G en el siguiente orden: e, a, b, c.

Usando la construcción de Cayley, convertimos G en el siguiente subgrupo de S_4:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo, continuación (representación matricial regular de G)

Identificamos G con el siguiente subgrupo de S_4:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$,

$$\rho(g) := P_g.$$

Por ejemplo,

$$\rho(b) = P_b = P_{3,4,1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V.

Se dice que W es un subespacio invariante o estable respecto ρ, si

$$\forall g \in G \qquad \forall w \in W \qquad \rho(g)w \in W.$$

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V.

Se dice que W es un subespacio invariante o estable respecto ρ, si

$$\forall g \in G \qquad \forall w \in W \qquad \rho(g)w \in W.$$

También se dice que W es un ρ-subespacio de V (o G-subespacio de V).

Subrepresentación

Suponemos que $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación y W es un subespacio de V invariante respecto a W.

Subrepresentación

Suponemos que $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación
y W es un subespacio de V invariante respecto a W.

Para cada g en G, definimos $\rho^W(g)\colon W \to W$,

$$\rho^W(g)v := \rho(g)v.$$

En otras palabras, $\rho^W(g) = \rho(g)|_W^W$. Estamos restringiendo el dominio y el codominio.

Es fácil ver que

$$\rho^W(g)\rho^W(h) = \rho^W(gh)$$

y que $\rho^W(g) \in \mathrm{GL}(W)$.

Subrepresentación

Suponemos que $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación
y W es un subespacio de V invariante respecto a W.

Para cada g en G, definimos $\rho^W(g)\colon W \to W$,

$$\rho^W(g)v := \rho(g)v.$$

En otras palabras, $\rho^W(g) = \rho(g)|_W^W$. Estamos restringiendo el dominio y el codominio.

Es fácil ver que

$$\rho^W(g)\rho^W(h) = \rho^W(gh)$$

y que $\rho^W(g) \in \mathrm{GL}(W)$.

Concluimos que $\rho^W\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ es una representación.

Subrepresentación

Suponemos que $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación
y W es un subespacio de V invariante respecto a W.

Definimos $\rho^W\colon G \to \mathrm{GL}(W)$,

$$\rho^W(g)v := \rho(g)v.$$

Se dice que ρ^W es una subrepresentación de ρ.

Ejemplo

Sean G un grupo de orden n, V un espacio vectorial de dimensión n, $(b_t)_{t\in G}$ una base de V.

Consideramos la representación regular:

$$\rho(g)b_t := b_{gt}.$$

Ejemplo

Sean G un grupo de orden n, V un espacio vectorial de dimensión n, $(b_t)_{t\in G}$ una base de V.

Consideramos la representación regular:

$$\rho(g)b_t := b_{gt}.$$

Pongamos

$$u := \sum_{t\in G} b_t, \qquad W := \mathbb{C}u.$$

Es fácil ver que $\rho(g)u = u$ para cada g en G.

Ejemplo

Sean G un grupo de orden n, V un espacio vectorial de dimensión n, $(b_t)_{t\in G}$ una base de V.

Consideramos la representación regular:

$$\rho(g)b_t := b_{gt}.$$

Pongamos

$$u := \sum_{t\in G} b_t, \qquad W := \mathbb{C}u.$$

Es fácil ver que $\rho(g)u = u$ para cada g en G.

Por lo tanto, W es un subespacio invariante. En este ejemplo, ρ^W es la representación trivial.

La suma directa de dos representaciones

Sean G un grupo, V_1 y V_2 espacios vectoriales,
$\rho_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ y $\rho_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ representaciones.

Denotamos por $V_1 \oplus V_2$ la suma directa de V_1 y V_2.

La suma directa de representaciones ρ_1 y ρ_2 es

$$\rho_1 \oplus \rho_2\colon G \to V_1 \oplus V_2,$$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(x, y) := (\rho_1(x), \rho_2(y)).$$

Ejercicio: verificar que $\rho_1 \oplus \rho_2$ es una representación.

Idea de descomposición de una representación en una suma directa

Supongamos que $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación
y W_1, W_2 son dos subespacios ρ-invariantes tales que

$$V = W_1 \dot{+} W_2,$$

es decir,

$$V = W_1 + W_2, \qquad W_1 \cap W_2 = \{0_V\}.$$

En este caso, V se identifica con la suma directa $W_1 \oplus W_2$,
y ρ se idenficia con la suma directa $\rho^{W_1} \oplus \rho^{W_2}$.

Ejercicio: verificar estas afirmaciones.

Teorema de Maschke para representaciones lineales de grupos finitos y espacios vectoriales de dimensión finita

Teorema

Sea G un grupo finito, V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y W un ρ-subespacio de V.

Entonces, existe un ρ-subespacio U de V tal que

$$V = W \dotplus U.$$

Corolario: si W es un ρ-subespacio de V tal que $0 < \dim(W) < \dim(V)$, entonces podemos descomponer ρ en representaciones de grado menor.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ se llama irreducible
si en V no existe subespacio ρ-invariante W tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Mapeos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un mapeo o morfismo entre ρ y σ es una transformación lineal $T\colon V \to W$ tal que

$$\forall g \in G \qquad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$

Otros términos: T es un mapeo G-lineal, T entrelaza ρ y σ.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & W \arrow[d, "\sigma(g)"] \\
V \arrow[r, "T"] & W
\end{tikzcd}$$

El centralizador de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación.

El centralizador o conmutante de ρ se define como el conjunto de todos los operadores lineales $T\colon V \to V$ que conmutan con $\rho(g)$ para cada g en G:

$$\mathcal{C}(\rho) := \left\{T \in \mathcal{L}(V)\colon \quad \forall g \in G \quad T\rho(g) = \rho(g)T\right\}.$$

Lema de Schur

El "Lema de Schur" consiste de los siguientes dos teoremas importantes.

Teorema (lema de Schur para homomorfismos de representaciones irreducibles)

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones irreducibles y sea T un homomorfismo entre ρ y σ.

Entonces, T es un isomorfismo o T es cero.

Teorema (lema de Schur para automorfismos de representaciones irreducibles)

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación irreducible, entonces $\mathcal{C}(\rho)$ consiste solamente de los operadores escalares:

$$\mathcal{C}(\rho) = \{\lambda I\colon\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$