

# Representaciones de grupos finitos y propiedades espectrales

**Objetivos.** Dada una representación  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ , donde  $G$  es un grupo finito y  $V$  es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, vamos a estudiar las propiedades espectrales de los operadores  $\rho(g)$ , donde  $g \in G$ .

**Prerrequisitos.** Representación de grupo, representación unitaria, criterio de diagonalización de operadores lineales o matrices.

Dado  $m$  en  $\mathbb{N}$ , denotemos por  $R_m$  al grupo de las  $m$ -ésimas raíces de la unidad:

$$R_m := \{z \in \mathbb{C} : z^m = 1\}.$$

**Teorema 1.** Sean  $G$  un grupo finito de orden  $m$ ,  $V$  un espacio vectorial complejo de dimensión finita,  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  una representación y  $g \in G$ . Entonces, el operador lineal  $\rho(g)$  es diagonalizable y sus valores propios pertenecen a  $R_m$ .

*Primera demostración.* Sea  $A := \rho(g)$ . Como  $G$  es de orden  $m$ , tenemos que  $g^m = 1_G$ . Como  $\rho$  es una representación,

$$A^m = \rho(g^m) = \rho(1_G) = I.$$

Consideremos el polinomio

$$f(x) := x^m - 1.$$

Por la igualdad anterior,  $f$  es un polinomio anulador de  $A$ :

$$f(A) = A^m - I = 0.$$

Las raíces del polinomio  $f$  son simples y forman el conjunto  $R_m$ . Por lo tanto, el operador  $A$  es diagonalizable. Más aún, por el teorema espectral, para cada valor propio  $\lambda$  se cumple la igualdad

$$f(\lambda) = 0,$$

así que  $\lambda \in R_m$ . □

*Segunda demostración.* Como ya sabemos, en  $V$  existe un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tal que  $\rho$  es unitaria respecto a este producto interno. Por lo tanto, la matriz  $A := \rho(g)$  es unitaria. Las matrices unitarias son normales, por eso son diagonalizables.

La contención  $\text{sp}(A) \subseteq R_m$  está mostrada en la primera demostración. □