

Existencia de un producto interno que convierte la representación dada en una representación unitaria

Prerrequisitos. Representación de grupo, representación unitaria.

Proposición 1 (construcción de un producto interno en un espacio vectorial complejo de dimensión finito). *Si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, entonces en V existe un producto interno.*

Demostración. Sea $n = \dim(V)$. Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ el producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$. La idea es usar un isomorfismo entre V y $\mathbb{C}^n$ y transportar el producto interno de $\mathbb{C}^n$ a V .

Sea $(b_1, \dots, b_n)$ una base ordenada de V . Definimos $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$,

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k.$$

De la definición de base ordenada se sigue que T es un isomorfismo de espacios vectoriales. Definimos $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(u, v) := \langle T^{-1}(u), T^{-1}(v) \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

Es fácil ver que f es un producto interno en V . □

Teorema 2. *Si G es un grupo finito, V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación, entonces V existe un producto interno tal que ρ es unitaria respecto a este producto interno.*

Proposición 3 (multiplicación por un elemento fijo por la derecha es una biyección). *Sea G un grupo y sea $s \in G$. Definimos $\psi: G \rightarrow G$,*

$$\psi(g) := gs.$$

Entonces, ψ es una biyección.

Demostración. Definimos $\xi: G \rightarrow G$, $\xi(g) := gs^{-1}$. Es fácil ver que las funciones ξ y ψ son mutuamente inversas:

$$\xi \circ \psi = \text{id}_G, \quad \psi \circ \xi = \text{id}_G. \quad \square$$

Demostración. Sean G, V, ρ tales como en el enunciado del teorema. Aplicamos la Proposición 1 y encontramos un producto interno f en el espacio V .

Sea m el orden del grupo G :

$$m := \#G.$$

Definimos una nueva función $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:

$$\langle a, b \rangle := \frac{1}{m} \sum_{g \in G} f(\rho(g)a, \rho(g)b).$$

1. Es fácil ver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ también es un producto interno en V . Probemos solamente la propiedad estrictamente positiva. Si $a \in V$ y $a \neq 0$, entonces para cada g en G tenemos que $\rho(g)a \neq 0$ y $f(\rho(g)a, \rho(g)a) > 0$, luego $\langle a, a \rangle > 0$.

2. Probemos que ρ es unitaria respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dados a, b en V y s en G , tenemos la siguiente cadena de igualdades. El paso crucial es el cambio de variable $t = gs$. Debido a la Proposición 3, este cambio de variable es una biyección, por eso se puede hacer.

$$\begin{aligned} \langle \rho(s)a, \rho(s)b \rangle &= \frac{1}{m} \sum_{g \in G} f(\rho(g)\rho(s)a, \rho(g)\rho(s)b) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} f(\rho(gs)a, \rho(gs)b) \\ &\stackrel{t=gs}{=} \frac{1}{m} \sum_{t \in G} f(\rho(t)a, \rho(t)b) = \langle a, b \rangle. \end{aligned}$$

Hemos mostrado que

$$\langle \rho(s)a, \rho(s)b \rangle = \langle a, b \rangle. \tag{1}$$

Esto significa que la transformación lineal $\rho(s)$ es isométrica. Además, de la definición de representación se sigue que $\rho(s)$ es invertible. Por lo tanto, $\rho(s)$ es unitaria. $\square$