

Representaciones regulares de grupos finitos

(un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko, con ayuda de Victor Hugo Hernandez Macias

<https://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

31 de marzo de 2026

Objetivos de este tema

- Dado un grupo finito, construir sus representaciones regulares.
- Dado un grupo finito, construir sus representaciones regulares matriciales.
- Conocer ejemplos.

Prerrequisitos para este tema

- conceptos básicos de álgebra lineal;
- conceptos básicos de la teoría de grupos;
- matrices de permutaciones.

1 Repaso de las definiciones básicas

2 Representaciones regulares

1 Repaso de las definiciones básicas

2 Representaciones regulares

Representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos
y solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dado un espacio vectorial V , denotamos por $GL(V)$ al grupo de sus automorfismos (isomorfismos $V \rightarrow V$).

Una **representación lineal** de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho: G \rightarrow GL(V)$.

Vamos a trabajar solamente con representaciones lineales,
por eso decimos simplemente **representación**.

Si $\dim(V) = n$, se dice que n es el grado de la representación ρ .

Representaciones matriciales

Para $V = \mathbb{C}^n$, el grupo $\mathrm{GL}(V)$ se identifica con $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

En otras palabras, los operadores lineales invertibles $V \rightarrow V$ se identifican con matrices invertibles de clase $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Una **representación matricial** de G de grado n es un homeomorfismo $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Recordatorio: convertir G en permutaciones de G

Proposición (construcción de Cayley)

Sea G un grupo. Para cada g en G , definimos $L_g: G \rightarrow G$,

$$L_g(t) := gt.$$

Entonces,

- para cada g en G , L_g es una biyección, es decir, $L_g \in \text{Sym}(G)$;
- la correspondencia $g \mapsto L_g$ es inyectiva;
- $\{L_g: g \in G\}$ es un subgrupo de G .

Demostración: ejercicio.

1 Repaso de las definiciones básicas

2 Representaciones regulares

Subclase de representaciones: representaciones regulares

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

Subclase de representaciones: representaciones regulares

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

En otras palabras, estamos suponiendo que los elementos de la base están indizados con los elementos de G .

Subclase de representaciones: representaciones regulares

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

En otras palabras, estamos suponiendo que los elementos de la base están indizados con los elementos de G .

Se define $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$,

$$\rho(g) \left(\sum_{t \in G} \alpha_t b_t \right) := \sum_{t \in G} \alpha_t b_{gt}.$$

Subclase de representaciones: representaciones regulares

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

En otras palabras, estamos suponiendo que los elementos de la base están indizados con los elementos de G .

Se define $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$,

$$\rho(g) \left(\sum_{t \in G} \alpha_t b_t \right) := \sum_{t \in G} \alpha_t b_{gt}.$$

En particular,

$$\rho(g)b_t = b_{gt}.$$

Otra fórmula explícita para una representación regular

Proposición

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación regular:

$$\rho(g) \left(\sum_{t \in G} \alpha_t b_t \right) := \sum_{t \in G} \alpha_t b_{gt}.$$

Entonces, para cada g en G ,

$$\rho(g) \left(\sum_{t \in G} \alpha_t b_t \right) = \sum_{s \in G} \alpha_{g^{-1}s} b_s.$$

Otra fórmula explícita para una representación regular

Proposición

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación regular:

$$\rho(g) \left(\sum_{t \in G} \alpha_t b_t \right) := \sum_{t \in G} \alpha_t b_{gt}.$$

Entonces, para cada g en G ,

$$\rho(g) \left(\sum_{t \in G} \alpha_t b_t \right) = \sum_{s \in G} \alpha_{g^{-1}s} b_s.$$

Demostración: usamos el cambio de variable $s = gt$.

Como hemos recordado, la correspondencia $t \mapsto gt$ es biyectiva.

Ejemplo

$$G = \{e, a, b, c\},$$

con la siguiente regla de multiplicación:

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión 4.

Elegimos una base de V y la indexamos con elementos de G :

$$u_e, \quad u_a, \quad u_b, \quad u_c.$$

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ la representación regular correspondiente. Entonces, por ejemplo,

$$\rho(a)(\alpha_e u_e + \alpha_a u_a + \alpha_b u_b + \alpha_c u_c) = \alpha_e u_a + \alpha_a u_e + \alpha_b u_c + \alpha_c u_b.$$

Vamos a ver una forma matricial de representaciones regulares.

Necesitamos repasar el concepto de matrices de permutación.

Matrices de permutación

Dada una permutación σ en S_n , le asociamos la **matriz de permutación** :

$$P_\sigma := \left[\delta_{j, \sigma(k)} \right]_{j,k=1}^n.$$

Notamos que

$$j = \sigma(k) \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma^{-1}(j) = k.$$

Por lo tanto,

$$P_\sigma = \left[\delta_{\sigma^{-1}(j), k} \right]_{j,k=1}^n.$$

Matrices de permutación, ejemplo

$$P_{\sigma} = \left[\delta_{j, \sigma(k)} \right]_{j,k=1}^n = \left[\delta_{\sigma^{-1}(j), k} \right]_{j,k=1}^n.$$

Ejemplo:

$$\sigma = (3, 5, 4, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrices de permutación y vectores de la base canónica

$$P_\sigma := \left[\delta_{j, \sigma(k)} \right]_{j,k=1}^n.$$

Proposición

Si $\sigma \in S_n$ y $q \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$P_\sigma e_q = e_{\sigma(q)}.$$

Demostración.

$$(P_\sigma e_q)_j = \sum_{k=1}^n (P_\sigma)_{j,k} (e_q)_k = \sum_{k=1}^n \delta_{j, \sigma(k)} \delta_{q,k} = \delta_{j, \sigma(q)} = (e_{\sigma(q)})_j.$$

El producto de dos matrices de permutación

Proposición

Si $\sigma, \tau \in S_n$, entonces

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}.$$

El producto de dos matrices de permutación

Proposición

Si $\sigma, \tau \in S_n$, entonces

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}.$$

Demostración. Para cada q en $\{1, \dots, n\}$,

$$P_\sigma P_\tau e_q = P_\sigma e_{\tau(q)} = e_{\sigma(\tau(q))} = e_{(\sigma\tau)(q)} = P_{\sigma\tau} e_q.$$

Por lo tanto, la q -ésima columna de $P_\sigma P_\tau$ coincide con la q -ésima columna de $P_{\sigma\tau}$.

Como q es arbitrario, concluimos que estas dos matrices son iguales.

El producto de dos matrices de permutación

Proposición

Si $\sigma, \tau \in S_n$, entonces

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}.$$

Demostración. Para cada q en $\{1, \dots, n\}$,

$$P_\sigma P_\tau e_q = P_\sigma e_{\tau(q)} = e_{\sigma(\tau(q))} = e_{(\sigma\tau)(q)} = P_{\sigma\tau} e_q.$$

Por lo tanto, la q -ésima columna de $P_\sigma P_\tau$ coincide con la q -ésima columna de $P_{\sigma\tau}$.

Como q es arbitrario, concluimos que estas dos matrices son iguales.

Ejercicio: escribir una demostración directa, trabajando con $(P_\sigma P_\tau)_{j,k}$.

Las matrices de permutación y los vectores generales

Proposición

Si $\sigma \in S_n$ y $x \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$P_\sigma x = [x_{\sigma^{-1}(j)}]_{j=1}^n.$$

Las matrices de permutación y los vectores generales

Proposición

Si $\sigma \in S_n$ y $x \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$P_\sigma x = [x_{\sigma^{-1}(j)}]_{j=1}^n.$$

Demostración.

$$(P_\sigma x)_j = \sum_{k=1}^n (P_\sigma)_{j,k} x_k = \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma^{-1}(j),k} x_k = x_{\sigma^{-1}(j)}.$$

Ejemplo: el producto de una matriz de permutación por un vector

Sean $n = 5$, $x \in \mathbb{C}^5$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso,

$$P_{\sigma}x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, $(P_{\sigma}x)_3 = x_5 = x_{\sigma^{-1}(3)}$.

Representaciones regulares matriciales

Sea G un subgrupo de S_n .

Definimos $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(g) := P_g.$$

De manera equivalente, podemos poner $V := \mathbb{C}^n$,

$$\rho(g)x := [x_{g^{-1}(k)}]_{k=1}^n.$$

Por las propiedades de matrices de permutación,

$$\rho(g)e_j = e_{g(j)}.$$

Ejemplo (pasamos de un grupo finito a un subgrupo de S_n)

Otra vez consideramos $G = \{e, a, b, c\}$,
con la siguiente regla de multiplicación:

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Numeramos los elementos de G en el siguiente orden: e, a, b, c .

Usando la construcción de Cayley, convertimos G en el siguiente subgrupo de S_4 :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo, continuación (representación matricial regular de G)

Identificamos G con el siguiente subgrupo de S_4 :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$,

$$\rho(g) := P_g.$$

Por ejemplo,

$$\rho(b) = P_b = P_{3,4,1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$