Transformada de Fourier sobre grupos conmutativos finitos

Problemas para examen

El grupo dual de un grupo conmutativo finito

Suponemos que G es un grupo conmutativo finito. Usamos la notación aditiva y denotamos el elemento neutro por 0_G.

Ejercicio 1. Denotamos por $\mathbb{T}$ la circunferencia unitaria en el plano complejo:

$$\mathbb{T} \coloneqq \big\{z \in \mathbb{C} \colon \ |z| = 1\big\}.$$

Demuestre que $\mathbb{T}$, con la operación de multiplicación de números complejos, es un grupo.

Definición 2. Un *caracter* de G es un homomorfismo $G \to \mathbb{T}$.

Ejercicio 3. ¿Cuándo dos funciones se llaman iguales? ¿Cuándo dos caracteres se llaman iguales? ¿Cuándo dos caracteres no son iguales?

$$\varphi \neq \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad ?.$$

Definición 4. Denotamos por $\widehat{G}$ el conjunto de los caracteres de G.

Ejercicio 5 (raíces de la unidad, repaso)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\varepsilon_n \coloneqq \exp \frac{2\pi \,\mathrm{i}}{n}.$$

Muestre que para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$\varepsilon_n^j = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \mid j.$$

Ejercicio 6 (ejemplo de caracter de un grupo finito cíclico)**.** Sea G un grupo cíclico finito generado su elemento g. Supongamos que $\#G = n$. Sabemos que cada elemento de G se escribe de manera única en la forma jg, donde $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Sea $q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Definimos $\varphi \colon G \to \mathbb{T}$,

$$\varphi(ja) \coloneqq \varepsilon_n^j.$$

Muestre que $\varphi \in \widehat{G}$.

Ejercicio 7 (los valores de un caracter son raíces de la unidad)**.** Sea $\varphi \in \widehat{G}$ y sean $n = \#G$. Demuestre que

$$\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \big\{\varepsilon_n^k \colon \ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\big\}.$$

Ejercicio 8. Demuestre que el conjunto $\widehat{G}$ es finito.

Ejercicio 9 (el producto de dos caracteres es un caracter)**.** Sean $\varphi, \psi \in \widehat{G}$. Definimos $\varphi\psi\colon G \to \mathbb{T}$,

$$(\varphi\psi)(g) \coloneqq \varphi(g)\psi(g).$$

Muestre que $\varphi\psi \in \widehat{G}$.

Ejercicio 10 (el caracter neutro)**.** Definimos $1_{\widehat{G}}\colon G \to \mathbb{T}$,

$$1_{\widehat{G}}(g) \coloneqq 1 \qquad (g \in G).$$

Muestre que $1_{\widehat{G}} \in \widehat{G}$. Muestre que para cada φ en $\widehat{G}$,

$$\varphi 1_{\widehat{G}}(g) = 1_{\widehat{G}}(g)\varphi = \varphi.$$

Ejercicio 11 (el caracter inverso)**.** Dado φ en $\widehat{G}$, denotamos por $\overline{\varphi}$ el caracter complejo conjugado:

$$\overline{\varphi}(g) \coloneqq \overline{\varphi(g)} \qquad (g \in G).$$

Muestre que $\overline{\varphi} \in \widehat{G}$. Muestre que

$$\varphi\,\overline{\varphi} = \overline{\varphi}\,\varphi = 1_{\widehat{G}}.$$

Definición 12 (el grupo dual de un grupo conmutativo finito)**.** El *grupo dual* de G es el conjunto $\widehat{G}$ con la multiplicación definida en el Ejercicio 9. Sabemos que la multiplicación de funciones complejas es asociativa y conmutativa. Tomando en cuenta los ejercicios anteriores, concluimos que $\widehat{G}$ es un grupo conmutativo.

Ejercicio 13. Para cada a en G, definimos $\theta_a\colon G \to G$,

$$\theta_a(x) \coloneqq x + a.$$

Muestre que para cada a, b en G,

$$\theta_a \circ \theta_b = \theta_{a+b}.$$

Muestre θ_0 es la función identidad. Muestre que para cada a en G, la función θ_a es invertible y

$$\theta_{-a} = \theta_a^{-1}.$$

Ejercicio 14. Sea $f\colon G \to \mathbb{C}$ y sea $a \in G$. Muestre que

$$\sum_{x\in G} f(x) = \sum_{y\in G} f(y + a).$$

Sugerencia: utilice un cambio de variable en la suma. Hay que justificar que el cambio de variable es una función biyectiva. Utilice el resultado del Ejercicio 13.

Ejercicio 15. Sea $\varphi \in \widehat{G}$, $\varphi \neq 1_{\widehat{G}}$. ¿Qué significa la última condición? (¿Cuándo dos funciones no son iguales?)

Ejercicio 16. Sean $S \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C}$ tales que

$$qS = S, \qquad q \neq 1.$$

Muestre que $S = 0$.

Problema 17 (la suma de los valores de un caracter no nulo)**.** Sea $\varphi \in \widehat{G}$, $\varphi \neq 1_{\widehat{G}}$. Muestre que

$$\sum_{x \in G} \varphi(x) = 0.$$

Utilice los resultados de algunos ejercicios anteriores.

Teorema 18 (el promedio de los valores de un caracter)**.** *Muestre que para cada φ en $\widehat{G}$,*

$$\frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \varphi(x) = \delta_{\varphi, 1_{\widehat{G}}}.$$

Teorema 19 (la ortogonalidad de los caracteres)**.** *Muestre que para cada φ, ψ en $\widehat{G}$,*

$$\frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \varphi(x)\overline{\psi(x)} = \delta_{\varphi, \psi}.$$

La "riquesa" del grupo dual

Vamos que a demostrar que el grupo $\widehat{G}$ es "rico" en ciertos sentidos. En particular, $\widehat{G}$ es suficientemente rico para separar los puntos de G (Teorema 26).

Ejercicio 20 (el subgrupo generado por un subgrupo y un elemento)**.** Sea H un subgrupo de G y sea $a \in G \setminus H$. Definimos

$$X := \big\{x \in G\colon \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \exists h \in H \quad x = ka + h\big\}.$$

Muestre que X es un subgrupo de G. Muestre que si Y es un subgrupo de G, $H \subseteq Y$ y $a \in Y$, entonces $X \subseteq Y$. Esto significa que X es el subgrupo de G generado por H y a.

Ejercicio 21 (la forma exacta de los elementos del subgrupo generado por un subgrupo y un elemento)**.** En las suposiciones del Ejercicio 20, muestre que el siguiente conjunto es no vacío:

$$J := \big\{j \in \mathbb{N}\colon \ \ ka \in H\big\}.$$

Definimos

$$m := \min(J).$$

Muestre que cada elemento x de X se representa de manera única en la forma

$$x = ja + h,$$

donde $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ y $h \in H$.

Ejercicio 22 (receta para extender un caracter definido en un subgrupo H, al subgrupo generado por H y un elemento)**.** Supongamos que se cumplen las condiciones del Ejercicio 20. Definimos m como en el Ejercicio 21. Sea $\varphi \in \widehat{H}$. Notemos que $ma \in H$. El polinomio $z^m - \varphi(ma)$ tiene raíces. Sea ω una de estas raíces:

$$\omega^m = \varphi(ma).$$

Notamos que $\omega \in \mathbb{T}$. Definimos $\psi\colon X \to \mathbb{T}$ mediante la siguiente regla. Si $x = ja + h$, donde $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ y $h \in H$, pongamos

$$\psi(ja + h) \coloneqq \omega^j \varphi(h).$$

Muestre que $\psi \in \widehat{X}$ y $\psi \restriction_H = \varphi$.

Teorema 23 (teorema de extensión de caracteres)**.** *Demuestre que para cada grupo conmutativo finito G, cada subgrupo H de G y cada φ en $\widehat{H}$, existe ψ en $\widehat{G}$ tal que $\psi \restriction_H = \varphi$.*

Ejercicio 24. Sean G un grupo conmutativo finito, $g \in G$, H el subgrupo ge G generado por g. Usando el resultado del Ejercicio 6, construya φ en $\widehat{G}$ tal que $\varphi(g) \neq 1$. Usando el Teorema 23, encuentre un caracter ψ del grupo G tal que $\psi \restriction_H = \varphi$.

Teorema 25 (existencia de un caracter que distingue el punto dado no nulo)**.** *Demuestre que para cada x en $G \setminus \{0_G\}$ existe ξ en $\widehat{G}$ tal que*

$$\xi(x) \neq 1.$$

Teorema 26 (los caracteres separan los puntos del grupo)**.** *Demuestre que para cada x, y en G, si $x \neq y$, entonces existe ξ en $\widehat{G}$ tal que*

$$\xi(x) \neq \xi(y).$$

El grupo bidual

Definición 27 (el grupo bidual de un grupo conmutativo finito)**.** El grupo dual del grupo $\widehat{G}$ se llama el *grupo bidual* de G. Notación: $\widehat{\widehat{G}}$.

Ejercicio 28. Para cara a en G, definimos $\Lambda(a)\colon \widehat{G} \to \mathbb{T}$,

$$\Lambda(a)(\varphi) \coloneqq \varphi(a) \qquad (\varphi \in \widehat{G}).$$

Demuestre que $\Lambda(a) \in \widehat{\widehat{G}}$.

Ejercicio 29. Demuestre que la función $\Lambda\colon G \to \widehat{\widehat{G}}$ es un homomorfismo de grupos.

Ejercicio 30. Demuestre que la función Λ es inyectiva.

Después, vamos a mostrar que Λ es un isomorfismo de grupos.

Ejercicio 31 (multiplicación de los caracteres por un caracter fijo)**.** Dado φ en G, definimos $\eta_\psi \colon \widehat{G} \to \widehat{G}$,

$$\eta_\varphi(\xi) \coloneqq \varphi\,\xi.$$

Muestre que para cada φ, ψ en $\widehat{G}$,

$$\eta_\varphi \circ \theta_\psi = \theta_{\varphi\psi}.$$

Muestre $\eta_{1_{\widehat{G}}}$ es la función identidad. Muestre que para cada φ en G, la función η_φ es invertible y

$$\eta_{\overline{\varphi}} = \eta_\varphi^{-1}.$$

Ejercicio 32 (un cambio de variable en una suma sobre el grupo dual)**.** Sea $f \colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ y sea $\varphi \in \widehat{G}$. Muestre que

$$\sum_{\xi \in \widehat{G}} f(\xi) = \sum_{\psi \in \widehat{G}} f(\varphi\psi).$$

Sugerencia: utilice un cambio de variable en la suma. Hay que justificar que el cambio de variable es una función biyectiva. Utilice el resultado del Ejercicio 31.

La ortogonalidad dual de los caracteres

Problema 33 (la suma de los valores de todos los caracteres en un punto no nulo)**.** Sea $a \in G \setminus \{0_G\}$. Demuestre que

$$\sum_{\xi \in \widehat{G}} \xi(a) = 0.$$

Primer camino: encuentre φ en $\widehat{G}$ tal que $\varphi(a) \neq 1$, luego haga un cambio de variable en la suma, como en el Ejercicio 32.
Segundo camino: por el resultado del Ejercicio 30, $\Lambda(a)$ es un caracter no trivial del grupo $\widehat{G}$, y se puede aplicar el resultado del Problema 17 al grupo $\widehat{G}$.

Teorema 34 (el promedio de los valores de todos los caracteres en un punto dado)**.** *Sea $a \in G$. Demuestre que*

$$\frac{1}{\#\widehat{G}} \sum_{\xi \in \widehat{G}} \xi(a) = \delta_{a,0_G}.$$

Teorema 35 (la "ortogonalidad dual" de los caracteres)**.** *Sean $x, y \in G$. Demuestre que*

$$\frac{1}{\#\widehat{G}} \sum_{\xi \in \widehat{G}} \xi(x)\overline{\xi(y)} = \delta_{x,y}.$$

Teorema 36 (el tamaño del grupo dual)**.** *Demuestre que*

$$\#\widehat{G} = \#G.$$

Sugerencia. Considere la suma doble

$$\sum_{x\in G}\sum_{\xi\in\widehat{G}}\xi(x)$$

y simplifíquela de dos manera diferentes, usando los Teoremas 18 y 34.

Teorema 37 (el teorema de Pontryagin para los grupos conmutativos finitos)**.** *Demuestre que el homomorfismo* $\Lambda\colon G \to \widehat{\widehat{G}}$ *es un isomorfismo.*

La medida de conteo como una medida de Haar

Definición 38. Denotamos por 2^G al conjunto potencia de G. Sea $c \in (0, +\infty)$. Definimos $\nu\colon 2^G \to [0, +\infty]$,

$$\nu(X) \coloneqq c\,\#X.$$

En otras palabras, ν es la medida de conteo multiplicada por un coeficiente c.

Ejercicio 39. Demuestre que ν es una medida.

Ejercicio 40. Para cuál valor de c, ν es una medida de probabilidad?

Ejercicio 41 (ν es invariante bajo traslaciones)**.** Demuestre que para cada X en 2^G y cada a en G,

$$\nu(X + a) = \nu(X).$$

Sugerencia: utilice el resultado del Ejercicio 13.

Observación 42. Como ν está definida en todos los subconjuntos de G y es finita, de manera gratis obtenemos que ν es regular por arriba, regular por abajo en los conjuntos abiertos y localmente finita (se recomienda revisar las definiciones correspondientes en libros de la teoría de medida e integración). Concluimos que ν es una medida de Radon. Además, ν es finita en los conjuntos compactos.

Observación 43. Como ν tiene propiedades de la Observación 42 y es invariante bajo traslaciones, ν es una *medida de Haar*.

Ejercicio 44. Sea $c' \in (0, +\infty)$ tal que

$$c\,c' = \frac{1}{\#G}.$$

Definimos $\widehat{\nu}\colon 2^{\widehat{G}} \to [0, +\infty]$,

$$\widehat{\nu}(Y) \coloneqq c'\,\#Y.$$

Muestre que $\widehat{\nu}$ es una medida sobre $\widehat{G}$ y $\widehat{\nu}$ es invariante bajo traslaciones.

Las funciones complejas definidas en el grupo conmutativo finito forman un espacio de Hilbert

Denotamos por n el tamaño de G.

Fijamos $c, c' \in (0, +\infty)$ tales que $cc' = \frac{1}{n}$. Por lo común, se usan algunos de los siguientes valores:

- $c = 1$, $c' = \frac{1}{n}$,
- $c = \frac{1}{n}$, $c' = 1$,
- $c = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $c' = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Definición 45 (el producto interno en $\mathbb{C}^G$)**.** Denotamos por H el espacio vectorial $\mathbb{C}^G$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq c \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}.$$

Es fácil ver que H es un espacio de Hilbert.

Definición 46 (el producto interno en $\mathbb{C}^{\widehat{G}}$)**.** Denotamos por $\widehat{H}$ el espacio vectorial $\mathbb{C}^{\widehat{G}}$ con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}^{\widehat{G}}} \coloneqq c' \sum_{\xi \in \widehat{G}} u(\xi)\overline{v(\xi)}.$$

Es fácil ver que $\widehat{H}$ es un espacio de Hilbert.

La transformada de Fourier sobre grupos conmutativos finitos

Denotamos por n el tamaño de G.

Fijamos $c, c' \in (0, +\infty)$ tales que $cc' = \frac{1}{n}$. Por lo común, se usan algunos de los siguientes valores:

- $c = 1$, $c' = \frac{1}{n}$,
- $c = \frac{1}{n}$, $c' = 1$,
- $c = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $c' = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Definición 47. Definimos $F \colon \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^{\widehat{G}}$,

$$(Ff)(\xi) \coloneqq c \sum_{x \in G} \overline{\xi(x)} f(x).$$

En vez de Ff, se escribe también $\widehat{f}$.

Definición 48. Definimos $\widehat{F}\colon \mathbb{C}^{\widehat{G}} \to \mathbb{C}^{G}$,

$$(\widehat{F}g)(x) \coloneqq c' \sum_{\xi\in\widehat{G}} g(\xi)\xi(x).$$

Teorema 49 (inversión de la transformada de Fourier)**.** *Demuestre que para cada f en $\mathbb{C}^G$,*

$$f = \sum_{\xi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\xi)\xi.$$

En otras palabras,

$$\widehat{F}F = I_{\mathbb{C}^G}.$$

Sugerencia: utilice el Teorema 35.

Teorema 50 (la identidad de Parseval–Plancherel para el producto interno)**.** *Demuestre que para cada f, g en $\mathbb{C}^G$,*

$$c\sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)} = c' \sum_{\xi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}.$$

Teorema 51 (la identidad de Parseval–Plancherel para la norma)**.** *Demuestre que para cada f, g en $\mathbb{C}^G$,*

$$c \sum_{x\in G} |f(x)|^2 = c' \sum_{\xi\in\widehat{G}} |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Es un corolario del Teorema 50.

Observación 52. Recordemos que los espacios de Hilbert H y $\widehat{H}$ están introducidos en las Definiciones 45 y 46. Los Teoremas 50 y51 significan que

$$\langle f, g\rangle_H = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_{\widehat{H}}, \qquad \|f\|_H = \|\widehat{f}\|_{\widehat{H}}.$$

Tomando en cuenta que F es invertible, concluimos que F es un isomorfismo isométrico entre los espacios de Hilbert H y $\widehat{H}$.

Definición 53. Sea X un subconjunto de G. Definimos su *complemento ortogonal* como el siguiente subconjunto de $\widehat{G}$:

$$X^{\perp} \coloneqq \{\varphi \in \widehat{G}\colon \quad \forall x \in X \quad \varphi(x) = 1\}.$$

Ejercicio 54. Sea X un subconjunto de G. Demuestre que $X^{\perp}$ es un subgrupo de $\widehat{G}$.

Ejercicio 55. Sea X un subgrupo de G. Calcule la transformada de Fourier de su función característica.

Ejercicio 56. Sea X un subgrupo de G. Demuestre que

$$\#X \cdot \#(X^{\perp}) = \#G.$$

Convolución sobre un grupo conmutativo finito

Definición 57 (convolución de dos funciones)**.** Dadas dos funciones f, g de clase $\mathbb{C}^G$, su convolución $f * g \colon G \to \mathbb{C}$ se define mediante la siguiente regla:

$$(f * g)(x) \coloneqq c \sum_{y \in G} f(x-y)g(y).$$

Ejercicio 58 (la convolución de dos funciones a través de una suma sobre los pares ordenados)**.** Para cada x en G, pongamos

$$B_x \coloneqq \big\{(r,s) \in G^2 \colon \ r+s=x\big\}.$$

Demuestre que

$$(f * g)(x) = c \sum_{(r,s) \in B_x} f(r)g(s).$$

Ejercicio 59 (propiedad conmutativa de la convolución)**.** Demuestre que si f, g en $\mathbb{C}^G$, entonces

$$f * g = g * f.$$

Un camino: cambio de variable en la suma. Otro camino: el resultado del Ejercicio 58.

Ejercicio 60 (la convolución de tres funciones a través de una suma sobre G^3)**.** Para cada x en G, pongamos

$$T_x \coloneqq \big\{(r,s,t) \in G^3 \colon \ r+s+t=x\big\}.$$

Demuestre que para cada f, g, h en $\mathbb{C}^G$,

$$((f * g) * h)(x) = c^2 \sum_{(r,s,t) \in G^3} f(r)g(s)h(t)$$

y

$$(f * (g * h))(x) = c^2 \sum_{(r,s,t) \in G^3} f(r)g(s)h(t).$$

Ejercicio 61 (la convolución es asociativa)**.** Demuestre que la convolución tiene propiedad asociativa: para cada f, g, h en $\mathbb{C}^G$,

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Ejercicio 62 (la convolución es bilineal)**.** Demuestre que para cada f, g, h en $\mathbb{C}^G$ y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$(f+g) * h = (f * h) + (g * h), \qquad (\lambda f) * g = \lambda(f * g),$$
$$f * (g+h) = (f * g) + (f * h), \qquad f * (\lambda g) = \lambda(f * g).$$

Ejercicio 63. Recuerde la definición de álgebra compleja. En este tema, siempre incluimos la asociatividad de la multiplicación en la definición del álgebra.

Ejercicio 64. Muestre que $\mathbb{C}^{\widehat{G}}$, con la multiplicación definida punto a punto, es un álgebra compleja conmutativa con identidad.

Teorema 65. *El espacio vectorial $\mathbb{C}^G$, con la operación de convolución, es un álgebra compleja conmutativa.*

Ejercicio 66. Encuentre la identidad (multiplicativa) del álgebra $(\mathbb{C}^G, *)$.

Teorema 67 (el teorema de convolución)**.** *Demuestre que para cada f, g en $\mathbb{C}^G$,*

$$F(f * g) = (Ff)(Fg),$$

es decir, para cada ξ en $\widehat{G}$,

$$(F(f * g))(\xi) = (Ff)(\xi)(Fg)(\xi).$$

Teorema 68. *Muestre que F es un isomorfismo entre las álgebras complejas $(\mathbb{C}^G, *)$ y $\mathbb{C}^{\widehat{G}}$.*

Ejercicio 69. Muestre que la propiedad conmutativa y asociativa de la convolución se pueden demostrar usando el teorema de convolución.

Ejercicio 70. Sea $f \in \mathbb{C}^G$. ¿Cuándo f es invertible en el álgebra $(\mathbb{C}^G, *)$? Encuentre una condición necesaria y suficiente en términos de la transformada de Fourier de f.

Traslaciones y modulaciones

Definición 71 (el operador de traslación)**.** Para cada a en G, definimos $\tau(a)\colon \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^G$,

$$(\tau(a)f)(x) \coloneqq f(x - a).$$

Ejercicio 72. Demuestre que para cada a en G, el operador $\tau(a)$ es lineal:

$$\tau(a)(f + g) = \tau(a)f + \tau(a)g, \qquad \tau(a)(\lambda f) = \lambda\, \tau(a)f.$$

Ejercicio 73 (el producto de dos operadores de traslación)**.** Demuestre que para cada a, b en G,

$$\tau(a + b) = \tau(a)\tau(b).$$

Ejercicio 74. Muestre que

$$\tau(0) = I_{\mathbb{C}^G}.$$

Demuestre que para cada a en G,

$$\tau(a)\tau(-a) = \tau(-a)\tau(a) = I_{\mathbb{C}^G}.$$

Ejercicio 75. El espacio H está introducido en la Definición 45. Demuestre que para cada a en G, $\tau(a)$ es un operador unitario en H.

Teorema 76 (las traslaciones forman una representación unitaria)**.** *Demuestre que τ es una representación unitaria del grupo G en el espacio de Hilbert H.*

Definición 77 (el operador de modulación)**.** Para cada a en G, definimos $\sigma(a)\colon \mathbb{C}^{\widehat{G}} \to \mathbb{C}^{\widehat{G}}$,

$$(\sigma(a)u)(\xi) \coloneqq \overline{\xi(a)}u(\xi).$$

Ejercicio 78. Demuestre que para cada a en G, $\sigma(a)$ es un operador lineal.

Ejercicio 79 (el producto de dos operadores de modulación)**.** Demuestre que para cada a, b en G,

$$\sigma(a+b) = \sigma(a)\sigma(b).$$

Ejercicio 80. Muestre que

$$\sigma(0) = I_{\mathbb{C}^{\widehat{G}}}.$$

Demuestre que para cada a en G,

$$\sigma(a)\sigma(-a) = \sigma(-a)\sigma(a) = I_{\mathbb{C}^{\widehat{G}}}.$$

Ejercicio 81. El espacio $\widehat{G}$ está introducido en la Definición 46. Demuestre que para cada a en G, $\sigma(a)$ es un operador unitario en $\widehat{H}$.

Teorema 82 (las modulaciones forman una representación unitaria)**.** *Demuestre que τ es una representación unitaria del grupo G en el espacio de Hilbert H.*

Teorema 83 (la transformada de Fourier entrelaza las traslaciones con las modulaciones)**.** *Demuestre que la transformada de Fourier entrelaza las representaciones τ y σ, es decir, para cada a en G,*

$$F\tau(a) = \sigma(a)F.$$

Descripción del grupo dual por medio de formas bilineales no degeneradas

Definición 84. Una función $f\colon G^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se llama *forma bilineal* o *forma biaditiva*, si es aditiva respecto a cada uno de sus dos argumentos, es decir, para cada x, y, z en G,

$$f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z), \qquad f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z).$$

Definición 85. Una forma bilineal $f\colon G^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se llama *no degenerada*, si

$$\forall x \in G \qquad \exists y \in G \qquad f(x,y) \neq 0$$

y

$$\forall y \in G \qquad \exists x \in G \qquad f(x,y) \neq 0.$$

Ejercicio 86. Definimos $f\colon \mathbb{Z}_n^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mediante la siguiente regla:

$$f(j+n\mathbb{Z}, k+n\mathbb{Z}) \coloneqq \frac{jk}{n} + \mathbb{Z}.$$

Muestre que esta definición es consistente (el resultado no depende de la elección de los representantes) y f es una forma bilineal no degenerada.

Ejercicio 87. Sean $G_1, \ldots, G_m$ grupos conmutativos finitos. Para cada k en $\{1, \ldots, m\}$, sea $f_k\colon G_k^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{T}$ una forma bilineal no degenerada. Definimos $g\colon G_1 \oplus \cdots \oplus G_m \to \mathbb{R}/\mathbb{T}$,

$$g((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) \coloneqq \sum_{k=1}^{m} f_k(x_k, y_k).$$

Muestre que g es una forma bilineal no degenerada.

Teorema 88. *Se sabe que cada grupo conmutativo finito es isomorfo a una suma directa de grupos finitos cíclicos. Demuestre que sobre cada grupo conmutatativo finito G existe una forma bilineal no degenerada $G^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{T}$.*

Ejercicio 89 (la función exponencial $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$)**.** Definimos $\mathcal{E}\colon \mathbb{T}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ mediante la regla

$$\mathcal{E}(x + \mathbb{Z}) \coloneqq \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,x).$$

Muestre que la definición es consistente y $\mathcal{E}$ es un isomorfismo de grupos.

Definición 90. En lo que sigue, suponemos que G es un grupo conmutativo finito y está fija una forma bilineal no degenerada en G. Denotamos por $x \cdot y$ el valor de esta forma en un par ordenado (x, y).

Definición 91. Dado y en G, definimos $\mathcal{E}_y\colon G \to \mathbb{T}$,

$$\mathcal{E}_y(x) \coloneqq \mathcal{E}(x \cdot y).$$

Ejercicio 92. Muestre que para cada y en G, $\mathcal{E}_y \in \widehat{G}$.

Ejercicio 93. Muestre que si $y \in G \setminus \{0\}$, entonces $\mathcal{E}_y \neq 1_{\widehat{G}}$.

Ejercicio 94. Muestre que si $y, z \in G$ y $y \neq z$, entonces $\mathcal{E}_y \neq \mathcal{E}_z$.

Teorema 95. *Definimos $\Psi\colon G \to \widehat{G}$,*

$$\Psi(y) \coloneqq \mathcal{E}_y.$$

Demuestre que Ψ es un isomorfismo de grupos. Sugerencia: utilice el Teorema 36.