Morfismos de representaciones de grupos finitos (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

7 de noviembre de 2026

Objetivos de este tema

En este tema, estamos trabajando con grupos finitos
y sus representaciones lineales sobre espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Vamos a

- introducir el concepto de morfismos entre representaciones,
- conocer ejemplos (me falta escribir ejemplos).

Prerrequisitos para este tema

- el concepto de transformación lineal;
- el concepto de representación lineal de un grupo finito.

Transformaciones lineales

En este tema, trabajamos solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dados espacios vectoriales V y W, denotamos por $\mathrm{L}(V, W)$ o $\mathrm{Hom}(V, W)$
el conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to W$.

$\mathrm{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

$\mathrm{L}(V) \coloneqq \mathrm{L}(V, V)$ es el álgebra de todos los operadores lineales $V \to V$.

Dado un espacio vectorial V, denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ al grupo de sus automorfismos
(isomorfismos $V \to V$).

Representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos.

Una representación lineal de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

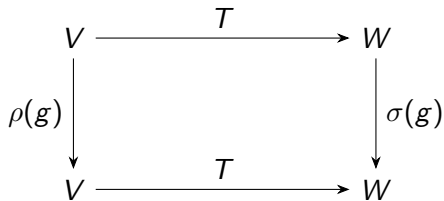
Vamos a trabajar solamente con representaciones lineales, por eso decimos simplemente representación.

Si $\dim(V) = n$, se dice que n es el grado de la representación ρ.

Morfismo entre representaciones (operador de entrelace)

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.
Un morfismo entre ρ y σ es una transformación lineal $T\colon V \to W$ tal que

$$\forall g \in G \qquad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$



También se dice que T es es un operador de entrelace entre ρ y σ.

El espacio vectorial de morfismos

Denotamos por $\mathrm{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to W$.

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones del grupo G,
denotamos por $\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ o $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ al conjunto de todos morfismos entre ρ y σ:

$$\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) \coloneqq \Big\{ T \in \mathrm{L}(V, W) \colon \quad \forall g \in G \quad T\rho(g) = \sigma(g)T \Big\}.$$

El espacio vectorial de morfismos

Denotamos por $\mathrm{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to W$.

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones del grupo G,
denotamos por $\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ o $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ al conjunto de todos morfismos entre ρ y σ:

$$\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) \coloneqq \Big\{ T \in \mathrm{L}(V, W)\colon \quad \forall g \in G \quad T\rho(g) = \sigma(g)T \Big\}.$$

Proposición

$\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{L}(V, W)$.

El espacio vectorial de morfismos

Denotamos por $\mathrm{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to W$.

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones del grupo G,
denotamos por $\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ o $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ al conjunto de todos morfismos entre ρ y σ:

$$\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) \coloneqq \Big\{ T \in \mathrm{L}(V, W)\colon \quad \forall g \in G \quad T\rho(g) = \sigma(g)T \Big\}.$$

Proposición

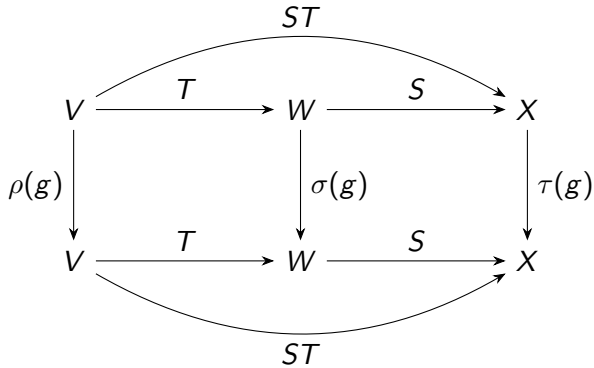
$\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{L}(V, W)$.

Demostración: ejercicio.

Composición de morfismos (ejercicio)

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$, $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(X)$ son representaciones, $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)$ y $S \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\tau}(W,X)$, entonces $ST \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\tau}(V,X)$.



El morfismo identidad

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Denotamos por I_V al operador identidad $V \to V$:

$$I_V(x) \coloneqq x \qquad (x \in V).$$

Ejercicio. Mostrar que $I_V \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\rho}(V, V)$.

El morfismo identidad

Ejercicio. Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ representaciones.
Mostrar que

$$\forall T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) \qquad T\, I_V = T,$$

$$\forall S \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(V, W) \qquad I_W\, S = S.$$

El morfismo identidad

Ejercicio. Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ representaciones.
Mostrar que

$$\forall T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) \qquad T\, I_V = T,$$

$$\forall S \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(V, W) \qquad I_W\, S = S.$$

Debido a este resultado, podemos decir que I_V es el morfismo identidad de ρ.

Isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama isomorfismo entre ρ y σ si existe $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $ST = I_V$ y $TS = I_W$.

Isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama **isomorfismo** entre ρ y σ si existe $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $ST = I_V$ y $TS = I_W$.

Proposición

Si $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es una transformación lineal invertible, entonces $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(W, V)$.

Isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama isomorfismo entre ρ y σ si existe $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $ST = I_V$ y $TS = I_W$.

Proposición

Si $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es una transformación lineal invertible, entonces $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(W, V)$.

En otras palabras, si T es un morfismo de representaciones y es un isomorfismo lineal, entonces es un isomorfismo de representaciones.

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g)$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) =$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1}$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1} \overset{T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1} \overset{T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} T^{-1}T\rho(g)T^{-1}$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1} \overset{T\in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} T^{-1}T\rho(g)T^{-1} =$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1} \overset{T\in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} T^{-1}T\rho(g)T^{-1} = \rho(g)T^{-1}.$$

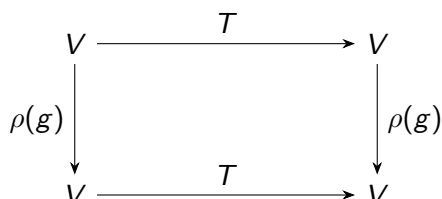
El centralizador (conmutante) de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación.

El centralizador de ρ se define como el conjunto de todos los morfismos entre ρ y ρ:

$$\mathcal{C}(\rho) \coloneqq \mathrm{Hom}_{G,\rho,\rho}(V,V), \quad \text{esto es,} \quad \mathcal{C}(\rho) = \Big\{ T \in \mathrm{L}(V) \colon \quad \forall g \in G \quad T\rho(g) = \rho(g)T \Big\}.$$

Otra notación: $\mathrm{End}_{\rho}(V)$.



El centralizador (conmutante) de una representación

Proposición

$\mathcal{C}(\rho)$ es una subálgebra de $\mathrm{L}(V)$. Además, $I_V \in \mathcal{C}(\rho)$.

El centralizador (conmutante) de una representación

Proposición

$\mathcal{C}(\rho)$ es una subálgebra de $\mathrm{L}(V)$. Además, $I_V \in \mathcal{C}(\rho)$.

Demostración: ejercicio.

Ejemplos

Aquí faltan ejemplos.