Representaciones matriciales de grupos finitos: definiciones y ejemplos

Egor Maximenko y Evelyn Sánchez Dorantes

https://esfm.egormaximenko.com

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México

4 de octubre de 2026

Repaso: representaciones lineales de grupos finitos

Sea G un grupo finito.

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

Denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ al grupo de los operadores lineales invertibles $V \to V$.

Una representación lineal de G en V es un homomorfismo $G \to \mathrm{GL}(V)$.

En lo que sigue, decimos "representación" en vez de "representación lineal".

Recordatorio: la correspondencia canónica entre matrices y operadores

Dada una matriz A de clase $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, definimos $T_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$T_A x := Ax.$$

Es fácil ver que T_A es un operador lineal: $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

La correspondencia $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, dada por $A \mapsto T_A$,
es un isomorfismo de álgebras complejas con identidad.

Recordatorio: la correspondencia canónica entre las matrices invertibles y los operadores invertibles

Denotamos por $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ al conjunto se las matrices cuadradas de grado n con entradas en $\mathbb{C}$ tales que son invertibles.

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, junto con la operación de multiplicación de matrices, conforma un grupo.

Como $A \mapsto T_A$ es un isomorfismo de álgebras con identidad,

$$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_A \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n).$$

Por lo tanto, es fácil ver que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ se puede identificar con $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$.
La regla $A \mapsto T_A$ realiza el isomorfismo canónico entre estos grupos.

Definición: representación matricial

Sea G un grupo finito.

Decimos que $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es una representación matricial de G de grado n, si ρ es un homomorfismo.

Gracias a la identificación de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ con $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$, las representaciones matriciales se pueden ver como un caso particular de representaciones lineales.

Ejemplo: una representación matricial de un grupo de tres elementos

Sea G_3 el conjunto $\{0, 1, 2\}$ con la operación dada mediante la siguiente tabla:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Definimos $\rho\colon G_3 \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$,

$$\rho(k) \coloneqq A^k, \qquad \text{donde} \qquad A \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

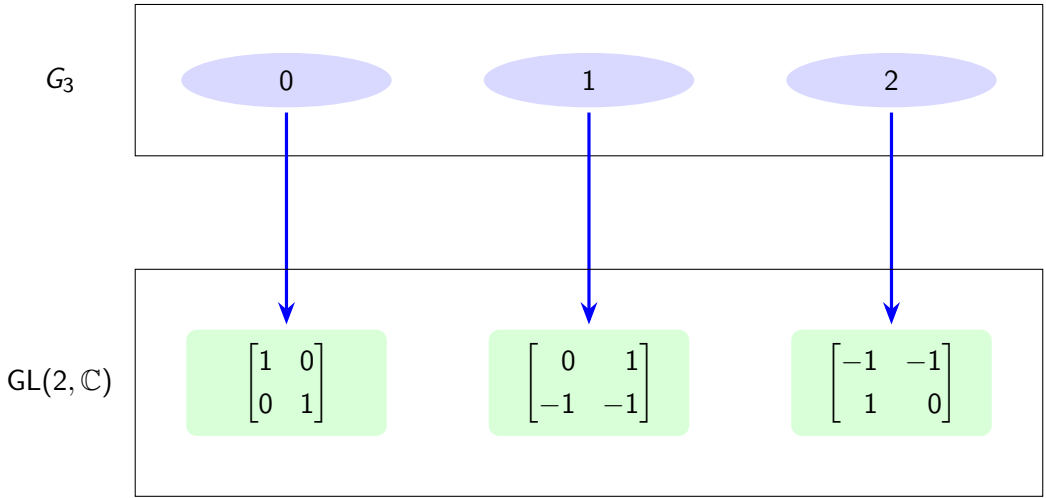
$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A es invertible, por lo que ρ está bien definida.

Calculemos las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$


G_3
0
1
2
$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Hemos definido $\rho\colon G_3 \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$,

$$\rho(k) \coloneqq A^k.$$

Veamos que ρ es una representación.

Una manera de verlo es estudiar otra función, $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, dada por $\varphi(k) \coloneqq A^k$.

Sean $j, k \in \mathbb{Z}$. Luego $\varphi(j+k) = A^{j+k} = A^j A^k$, así que φ es un homomorfismo de grupos.

$\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}), \quad \varphi(k) \coloneqq A^k.$

Proposición

$$\ker(\varphi) = 3\mathbb{Z}.$$

Demostración. $\supseteq$. Sea $s \in 3\mathbb{Z}$. Luego existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $s = 3q$.

$$A^s = A^{3q} = (A^3)^q = I_2^q = I_2, \qquad \text{por lo que} \qquad s \in \ker(\varphi).$$

$\subseteq$. Sea $t \in \ker(\varphi)$. Encontramos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $t = 3q + r$, donde $0 \leq r < 3$.

$$I_2 = A^t = A^{3q+r} = A^{3q}A^r = (A^3)^q A^r = I_2^q A^r = A^r.$$

Como $A^1 \neq I_2$ y $A^2 \neq I_2$, concluimos que $r = 0$ y por lo tanto $t = 3q$. □

Hemos estudiado el homomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, y hemos mostrado que

$$\ker(\varphi) = 3\mathbb{Z}.$$

Usando el primer teorema de isomorfismos llegamos a que

$$\mathbb{Z}/\ker(\varphi) = \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z}) \cong \mathrm{im}(\varphi),$$

y es fácil verificar que $G_3 \cong \mathbb{Z}_3$, así pues ρ es un homomorfismo.
Por lo tanto, ρ es una representación matricial de G_3 de grado 2.

Además, por el primer teorema de isomorfismos, ρ es fiel (inyectiva).

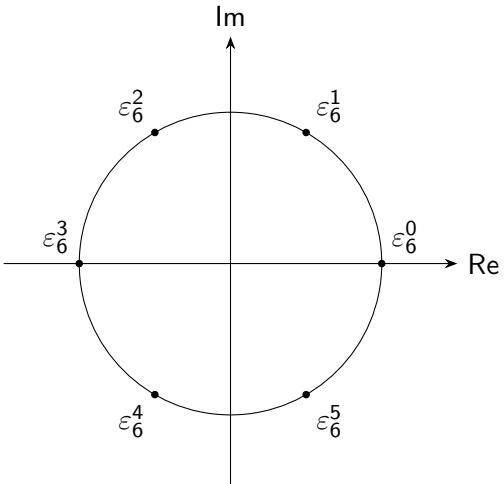
Repaso: el grupo $\{0, 1, \ldots, n-1\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea G_n el conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ con la operación

$$a \oplus b := \begin{cases} a + b, & a + b < n; \\ a + b - n, & a + b \geq n. \end{cases}$$

Se verifica que G_n es un grupo y, de hecho, $G_n \cong \mathbb{Z}_n$.

Repaso: las raíces de la unidad



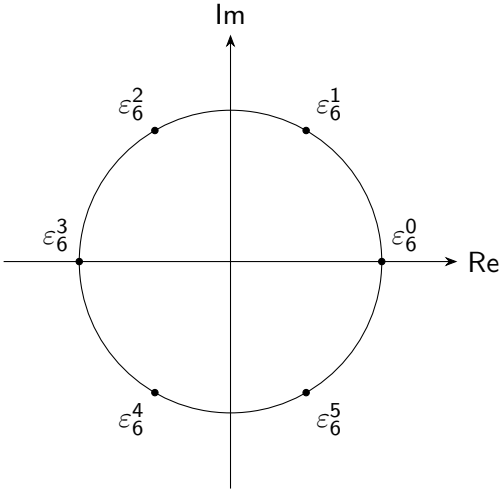
$$\varepsilon_n := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{n}.$$

Usaremos el siguiente hecho: para k en $\mathbb{Z}$,

$$\varepsilon_n^k = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \mid k.$$

En particular, $\varepsilon_n^n = 1$ y $\varepsilon_n^{-n} = 1$.

Ejemplo: una representación con raíces de la unidad



$$\varepsilon_n \coloneqq \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{n}.$$

$$\rho\colon G_n \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}), \quad \rho(k) \coloneqq [\varepsilon_n^k] = \varepsilon_n^k.$$

Veamos que ρ es una representación matricial de G_n de grado 1.

Ejemplo: una representación con raíces de la unidad

Sean $a, b \in G_n$.

Si $a + b < n$, entonces

$$\rho(a \oplus b) = \rho(a + b) = \varepsilon_n^{a+b} = \varepsilon_n^a \varepsilon_n^b = \rho(a)\rho(b).$$

Si $a + b \geq n$, entonces

$$\rho(a \oplus b) = \rho(a + b - n) = \varepsilon_n^{a+b-n} = \varepsilon_n^a \varepsilon_n^b \varepsilon_n^{-n} = \varepsilon_n^a \varepsilon_n^b = \rho(a)\rho(b).$$

Ejemplo: una representación matricial de grado 2 del grupo G_n

$$\rho\colon G_n \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}), \qquad \rho(k) \coloneqq \begin{bmatrix} \varepsilon_n^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $a + b < n$, entonces

$$\rho(a \oplus b) = \rho(a+b) = \begin{bmatrix} \varepsilon_n^{a+b} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_n^{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n^{b} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho(a)\rho(b).$$

Si $a + b \geq n$, entonces

$$\rho(a \oplus b) = \rho(a+b-n) = \begin{bmatrix} \varepsilon_n^{a+b-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_n^{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n^{b} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho(a)\rho(b).$$