Isomorfismos de representaciones (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

30 de octubre de 2026

Objetivos de este tema

En este tema, estamos trabajando con grupos finitos
y sus representaciones lineales sobre espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Vamos a

- Introducir el concepto de isomorfismos de representaciones,
- Introducir el concepto de representaciones equivalentes.
- Estudiar el concepto de representaciones matriciales equivalentes.
- Conocer ejemplos.

Prerrequisitos para este tema

- Morfismos de representaciones.
- Transformaciones lineales invertibles.

1 Repaso

2 Isomorfismos entre representaciones

Transformaciones lineales

En este tema, trabajamos solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dados espacios vectoriales V y W, denotamos por $\mathrm{L}(V, W)$ o $\mathrm{Hom}(V, W)$
el conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to W$.

$\mathrm{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

$\mathrm{L}(V) \coloneqq \mathrm{L}(V, V)$ es el álgebra de todos los operadores lineales $V \to V$.

Dado un espacio vectorial V, denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ al grupo de sus automorfismos
(isomorfismos $V \to V$).

Representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos.

Una representación lineal de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

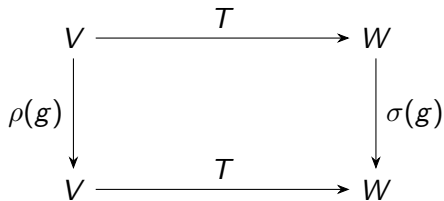
Vamos a trabajar solamente con representaciones lineales, por eso decimos simplemente representación.

Si $\dim(V) = n$, se dice que n es el grado de la representación ρ.

Morfismo entre representaciones (operador de entrelace)

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.
Un morfismo entre ρ y σ es una transformación lineal $T\colon V \to W$ tal que

$$\forall g \in G \qquad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$

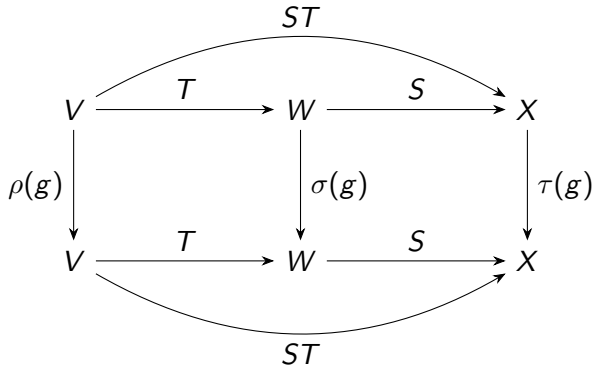


También se dice que T es es un operador de entrelace entre ρ y σ.

Composición de morfismos (ejercicio)

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$, $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(X)$ son representaciones, $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)$ y $S \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\tau}(W,X)$, entonces $ST \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\tau}(V,X)$.



El morfismo identidad

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Denotamos por I_V al operador identidad $V \to V$:

$$I_V(x) \coloneqq x \qquad (x \in V).$$

Ejercicio. Mostrar que $I_V \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\rho}(V, V)$.

El morfismo identidad

Ejercicio. Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ representaciones.
Mostrar que

$$\forall T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) \qquad T\, I_V = T,$$

$$\forall S \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(V, W) \qquad I_W\, S = S.$$

El morfismo identidad

Ejercicio. Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ representaciones.
Mostrar que

$$\forall T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) \qquad T\, I_V = T,$$

$$\forall S \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(V, W) \qquad I_W\, S = S.$$

Debido a este resultado, podemos decir que I_V es el morfismo identidad de ρ.

1 Repaso

2 Isomorfismos entre representaciones

Isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama isomorfismo entre ρ y σ si existe $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $ST = I_V$ y $TS = I_W$.

Isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama isomorfismo entre ρ y σ si existe $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $ST = I_V$ y $TS = I_W$.

Proposición

Si $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es una transformación lineal invertible, entonces $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(W, V)$.

Isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama isomorfismo entre ρ y σ si existe $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $ST = I_V$ y $TS = I_W$.

Proposición

Si $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es una transformación lineal invertible, entonces $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(W, V)$.

En otras palabras, si T es un morfismo de representaciones y es un isomorfismo lineal, entonces es un isomorfismo de representaciones.

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g)$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) =$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1}$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1} \overset{T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)}{=\!=\!=}$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1} \overset{T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} T^{-1}T\rho(g)T^{-1}$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1} \overset{T\in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} T^{-1}T\rho(g)T^{-1} =$$

Demostración

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y T es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G, tenemos que

$$T^{-1}\sigma(g) = T^{-1}\sigma(g)TT^{-1} \overset{T\in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} T^{-1}T\rho(g)T^{-1} = \rho(g)T^{-1}.$$

Representaciones equivalentes

Representaciones $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ se llaman equivalentes si existe un isomorfismo de representaciones $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$.

Representaciones equivalentes

Representaciones $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ se llaman **equivalentes** si existe un isomorfismo de representaciones $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$.

Proposición

Esta relación binaria es una relación de equivalencia.

Representaciones equivalentes

Representaciones $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ se llaman equivalentes si existe un isomorfismo de representaciones $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$.

Proposición

Esta relación binaria es una relación de equivalencia.

Demostración: ejercicio.

Dos representaciones equivalentes tienen el mismo grado (dimensión)

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son equivalentes, entonces $\dim(V) = \dim(W)$.

Dos representaciones equivalentes tienen el mismo grado (dimensión)

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son equivalentes, entonces $\dim(V) = \dim(W)$.

Demostración.

Si T es un isomorfismo entre ρ y σ, entonces T es un isomorfismo entre V y W.

Ejemplo

Sea $G = \mathbb{Z}_2$, $V = W$, $\dim(V) = n \geq 1$,

$$\rho(k + 2\mathbb{Z}) \coloneqq I_V, \qquad \sigma(k + 2\mathbb{Z}) \coloneqq (-1)^k I_V.$$

Mostremos que ρ y σ no son equivalentes.

Si $T\colon V \to V$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces

$$T\rho(1 + 2\mathbb{Z}) = T(-1)I_V = -T, \qquad \sigma(1 + 2\mathbb{Z})T = I_V T = T.$$

En este ejemplo, ρ y σ tienen el mismo grado, pero no son equivalentes.