Isomorfismos de representaciones matriciales (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

31 de octubre de 2026

Objetivos de este tema

- Introducir el concepto de isomorfismos de representaciones matriciales,
- Relacionar este concepto con representaciones y bases.

Prerrequisitos para este tema

- Representaciones y representaciones matriciales.
- Morfismos e isomorfismos de representaciones.
- La matriz asociada a un operador lineal respecto a una base.

1. Isomorfismos entre representaciones matriciales
2. Repaso: la matriz asociada a un operador respecto a una base
3. Criterio de representaciones matriciales equivalentes

Repaso: isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama isomorfismo entre ρ y σ si existe $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $ST = I_V$ y $TS = I_W$.

Repaso: isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama isomorfismo entre ρ y σ si existe $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $ST = I_V$ y $TS = I_W$.

Proposición

Si $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es una transformación lineal invertible, entonces $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(W, V)$.

Repaso: isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.

Un morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama isomorfismo entre ρ y σ si existe $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $ST = I_V$ y $TS = I_W$.

Proposición

Si $T \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es una transformación lineal invertible, entonces $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(W, V)$.

En otras palabras, si T es un morfismo de representaciones y es un isomorfismo lineal, entonces es un isomorfismo de representaciones.

Repaso: dos representaciones equivalentes tienen el mismo grado

Dos representaciones de G se llaman **equivalentes** si existe un isomorfismo entre ellas.

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son equivalentes, entonces $\dim(V) = \dim(W)$.

Repaso: dos representaciones equivalentes tienen el mismo grado

Dos representaciones de G se llaman **equivalentes** si existe un isomorfismo entre ellas.

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son equivalentes, entonces $\dim(V) = \dim(W)$.

Demostración.

Si T es un isomorfismo entre ρ y σ, entonces T es un isomorfismo entre V y W.

Isomorfismo entre representaciones matriciales

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ representaciones matriciales.

Una matriz $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ define un isomorfismo entre ρ y σ si y solo si

$$\forall g \in G \qquad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$

1 Isomorfismos entre representaciones matriciales

2 Repaso: la matriz asociada a un operador respecto a una base

3 Criterio de representaciones matriciales equivalentes

Repaso: el isomorfismo inducido por una base

En este tema, trabajamos solamente con bases ordenadas de espacios vectoriales.

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V.

Definimos $\Phi_{\mathcal{A}} \colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$\Phi_{\mathcal{A}} x \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k a_k.$$

De la definición de base ordenada, se sigue que $\Phi_{\mathcal{A}}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Por lo tanto, existe $\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \colon V \to \mathbb{C}^n$.

Repaso: el operador asociado a una matriz respecto a una base

Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base y sea $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Definimos $\Psi_{\mathcal{A}}(M)\colon V \to V$:

$$\Psi_{\mathcal{A}}(M) \coloneqq \Phi_{\mathcal{A}} M \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}.$$

Proposición

$\Psi_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{L}(V)$ es un isomorfismo de álgebras complejas con identidad.

Notación: si $T \in \mathrm{L}(V)$, $T_{\mathcal{A}} \coloneqq \Psi_{\mathcal{A}}^{-1}(T)$.

Repaso: cambio de base

Sean $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ bases de V y sea $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ la matriz de cambio de base:

$$b_k = \sum_{j=1}^{n} P_{j,k} a_j.$$

Entonces,

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}} P.$$

Repaso: cambio de base y operadores

Teorema

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V, P la matriz de cambio de base, $T \in \mathrm{L}(V)$. Entonces,

$$T_{\mathcal{B}} = P^{-1} T_{\mathcal{A}} P.$$

1 Isomorfismos entre representaciones matriciales

2 Repaso: la matriz asociada a un operador respecto a una base

3 Criterio de representaciones matriciales equivalentes

Al considerar una representación y dos bases del espacio, obtenemos dos representaciones matriciales equivalentes

En este tema, una base de V es una base ordenada.

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n,
sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación
y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos bases ordenadas de V.
Definimos $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$,

$$\sigma(g) \coloneqq \rho(g)_{\mathcal{A}}, \qquad \tau(g) \coloneqq \rho(g)_{\mathcal{B}}.$$

Entonces, σ y τ son representaciones matriciales equivalentes.

Demostración

Sea P la matriz de cambio de base.

Entonces, para cada g en G,

$$\tau(g) = \rho(g)_{\mathcal{B}} = P^{-1}\rho(g)_{\mathcal{A}}P = P^{-1}\sigma(g)P.$$

Por lo tanto, para cada g en G,

$$P\tau(g) = \sigma(g)P.$$

P es invertible y entrelaza τ y σ.

Dos representaciones matriciales equivalentes corresponden a una representación en dos bases

Proposición

Sean $\sigma, \tau \colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ representaciones equivalentes,
sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n y sea $\mathcal{A}$ una base de V.

Entonces, existen una base $\mathcal{B}$ de V y una representación $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$
tales que para cada g en G,

$$\sigma(g) = \rho(g)_{\mathcal{A}}, \qquad \tau(g) = \rho(g)_{\mathcal{B}}.$$

Demostración, definición de $\mathcal{B}$

Sea $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que

$$\forall g \in G \qquad P\tau(g) = \sigma(g)P.$$

Ya está fija una base $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ de V.

Definimos $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$:

$$b_k \coloneqq \sum_{j=1}^{n} P_{j,k} a_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Entonces, $\mathcal{B}$ es una base de V y P es la matriz de cambio de base.

Demostración, definición de ρ

Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$,

$$\rho(g) \coloneqq \Psi_{\mathcal{A}}(\sigma(g)), \quad \text{esto es,} \quad \rho(g) \coloneqq \Phi_{\mathcal{A}}\sigma(g)\Phi_{\mathcal{A}}^{-1}.$$

De manera más explícita,

$$\rho(g)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (\sigma(g)x)_k a_k.$$

Esta definición implica que $\rho(g)_{\mathcal{A}} = \sigma(g)$.

Demostración, final

Ya sabemos que P es la matriz de cambio de base y para cada g en G,

$$P\tau(g) = \sigma(g)P, \qquad \rho(g)_{\mathcal{A}} = \sigma(g).$$

Entonces, para cada g en G,

$$\rho(g)_{\mathcal{B}} = P^{-1}\rho(g)_{\mathcal{A}}P = P^{-1}\sigma(g)P = \tau(g).$$