Representaciones irreducibles
(un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

26 de octubre de 2026

Objetivos de este tema

- introducir el concepto de representación irreducible;
- conocer algunos ejemplos.

Estamos trabajando con grupos finitos
y sus representaciones lineales en espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Prerrequisitos para este tema

- representación lineal de grupo finito;
- subespacio invariante de un operador lineal;
- subespacio invariante de una representación;
- la representación restringida a un subespacio invariante.

1. Representaciones irreducibles

2. Ejemplo: la representación estándar del grupo simétrico es irreducible

1 Representaciones irreducibles

2 Ejemplo: la representación estándar del grupo simétrico es irreducible

Repaso: representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos
y solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dado un espacio vectorial V, denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ al grupo de sus automorfismos (isomorfismos $V \to V$).

Una representación (lineal) de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V.

Se dice que W es un subespacio invariante o estable respecto a ρ, si

$$\forall g \in G \qquad \forall w \in W \qquad \rho(g)w \in W.$$

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V.

Se dice que W es un subespacio invariante o estable respecto a ρ, si

$$\forall g \in G \qquad \forall w \in W \qquad \rho(g)w \in W.$$

También se dice que W es ρ-invariante, ρ-estable,
es un ρ-subespacio de V (o G-subespacio de V).

Repaso: $\{0_V\}$ y V son subespacios ρ-invariantes

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación, entonces $\{0_V\}$ y V son subespacios ρ-invariantes.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ se llama **irreducible**
si $V \neq \{0_V\}$ y no existe ρ-subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ se llama **irreducible**
si $V \neq \{0_V\}$ y no existe ρ-subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

La misma definición en otra forma equivalente:

una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ se llama **irreducible**
si $V \neq \{0_V\}$ y para cada ρ-subespacio W de V, si $W \neq \{0_V\}$, entonces $W = V$.

Cada representación de grado 1 es irreducible

Proposición

Sea G un grupo finito y sea V un espacio vectorial complejo tal que $\dim(V) = 1$.

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación, entonces ρ es irreducible.

Cada representación de grado 1 es irreducible

Proposición

Sea G un grupo finito y sea V un espacio vectorial complejo tal que $\dim(V) = 1$.

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación, entonces ρ es irreducible.

Demostración.

Si W es un subespacio vectorial de V, entonces $W = \{0_V\}$ o $W = V$.

Ejemplo: la representación trivial (de grado 1) es irreducible

Sea G un grupo finito y sea V un espacio vectorial complejo de dimensión 1.

La representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, definida mediante la regla

$$\rho(g) \coloneqq I_V \qquad (g \in G),$$

se llama representación trivial de G (en V).

Esta representación es irreducible.

Subespacios irreducibles respecto a una representación

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación y S es un ρ-subespacio de V tal que $S \neq \{0_V\}$, se dice que S es irreducible si ρ_S es irreducible.

Subespacios irreducibles respecto a una representación

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación y S es un ρ-subespacio de V tal que $S \neq \{0_V\}$, se dice que S es irreducible si ρ_S es irreducible.

En otras palabras,
S es irreducible si no existe ρ-subespacio W de S tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq S$.

Ejemplo

$G = \mathbb{Z}_3,\ V = \mathbb{C}^2,$

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3^k \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_3 \coloneqq \exp \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{3}.$$

Los subespacios $W_1 \coloneqq \mathrm{lin}(e_1)$ y $W_2 \coloneqq \mathrm{lin}(e_2)$ son irreducibles.

1. Representaciones irreducibles

2. Ejemplo: la representación estándar del grupo simétrico es irreducible

Ejemplo: la representación estándar del grupo simétrico

Sea $G = S_n$ y sea

$$V := \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}.$$

Notamos que los siguientes vectores forman una base de V:

$$e_1 - e_n, \quad e_2 - e_n, \quad \ldots, \quad e_{n-1} - e_n.$$

Consideremos $\rho \colon S_n \to \mathrm{GL}(V)$,

$$\rho(\varphi) := \left[x_{\varphi^{-1}(k)} \right]_{k=1}^{n}.$$

Vamos a mostrar que ρ es irreducible.

¿Qué podemos construir a partir de un vector no nulo, aplicando ρ?

Lema

Si $v \in V \setminus \{0_V\}$, entonces

$$\operatorname{lin}\{\rho(\varphi)v : \ \varphi \in S_n\} = V.$$

Demostración del lema, inicio

Sea $v \in V \setminus \{0_V\}$. Notamos que no todos los componentes de v son iguales entre si:

$$v \notin \mathbb{C}(e_1 + \cdots + e_n),$$

En efecto, si $v = \alpha(e_1 + \cdots + e_n)$ y $v \in V$, entonces $\alpha = 0$.

Encontramos $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ tales que

$$v_p \neq v_q.$$

Queremos mostrar que el siguiente subespacio vectorial coincide con V:

$$L \coloneqq \operatorname{lin}\{\rho(\varphi)v \colon \ \varphi \in S_n\}.$$

Demostración del lema, continuación

Construimos $\varphi \in S_n$ tal que

$$\varphi(p) = 1, \qquad \varphi(q) = n.$$

Construimos $\psi \in S_n$ tal que

$$\psi(p) = n, \qquad \psi(q) = 1, \qquad \forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p, q\} \quad \psi(k) = \varphi(k).$$

Pongamos

$$x \coloneqq \rho(\varphi)v, \qquad y \coloneqq \rho(\psi)v, \qquad z \coloneqq x - y.$$

Ejercicio: mostrar que z es un múltiplo no nulo de $e_1 - e_n$ y por eso

$$e_1 - e_n \in L.$$

Demostración del lema, continuación

Por ejemplo, si $n = 6$, $p = 2$, $q = 4$, entonces podemos poner

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

En este caso,

$$x = \rho(\varphi)v = [\, v_2, v_1, v_3, v_6, v_5, v_4 \,]^\top, \qquad y = \rho(\psi)v = [\, v_4, v_1, v_3, v_6, v_5, v_2 \,]^\top,$$

$$z = x - y = [v_2 - v_4, 0, 0, 0, 0, v_4 - v_2]^\top = (v_2 - v_4)(e_1 - e_6).$$

Luego

$$e_1 - e_6 = \frac{1}{v_2 - v_4}\, z \in \operatorname{lin}\{\rho(\varphi)v \colon\ \varphi \in S_n\} = L.$$

Demostración del lema, final

Hemos mostrado que

$$e_1 - e_n \in L.$$

De manera similar se demuestra que

$$e_2 - e_n,\ e_3 - e_n,\ \ldots,\ e_{n-1} - e_n \in L.$$

Como $e_1 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n$ forman una base de V,

$$V = L.$$

La representación estándar del grupo simétrico es irreducible

Teorema

ρ es irreducible.

Demostración del teorema

Supongamos que W es un ρ-subespacio de V y $W \neq \{0_V\}$.

Elegimos $v \in W \setminus \{0_V\}$. Como W es ρ-invariante,

$$\forall \varphi \in S_n \qquad \rho(\varphi)v \in W.$$

Pongamos

$$L \coloneqq \operatorname{lin}\{\rho(\varphi)v : \ \varphi \in S_n\}.$$

Luego $L \subseteq W$. Pero, por el lema, $L = V$. Concluimos que $W = V$.