Las representaciones irreducibles de grupos conmutativos finitos son unidimensionales (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

7 de noviembre de 2026

1. Representaciones irreducibles de grupos conmutativos finitos
2. Diagonalización de representaciones de grupos conmutativos finitos
3. Ejemplo

Teorema

Si G es un grupo finito conmutativo,

V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita

y $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación irreducible,

entonces $\dim(V) = 1$.

Teorema

Si G es un grupo finito conmutativo,
V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita
y $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación irreducible,
entonces $\dim(V) = 1$.

Vamos a demostrar este teorema, usando el lema de Schur.

Teorema

Si G es un grupo finito conmutativo,
V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita
y $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación irreducible,
entonces $\dim(V) = 1$.

Vamos a demostrar este teorema, usando el lema de Schur.

También vamos a ver un par de corolarios de este teorema.

Para los operadores escalares, cualquier subespacio es invariante

Primero, mostremos un resultado auxiliar sobre los operadores escalares.

Proposición

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathbb{C}I$,
entonces cualquier subespacio vectorial de V es T-invariante.

Demostración. Sea $T = \lambda I$ y sea $x \in W$. Entonces,

$$Tx = \lambda x \in W.$$

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h)$$

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) =$$

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$$

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) =$$

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg)$$

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) =$$

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Esto significa que

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Esto significa que para cada g en G,

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Esto significa que para cada g en G, $\rho(g) \in \mathcal{C}(\rho)$.

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Esto significa que para cada g en G, $\rho(g) \in \mathcal{C}(\rho)$.

3. Cada subespacio de V es ρ-invariante.

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Esto significa que para cada g en G, $\rho(g) \in \mathcal{C}(\rho)$.

3. Cada subespacio de V es ρ-invariante.

4. Sea $u \in V$, $u \neq \{0_V\}$. Entonces, $\mathbb{C}u$ es ρ-invariante.
Como ρ es irreducible,

Demostración del teorema

1. Como ρ es irreducible, por el lema de Schur, $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$.

2. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Esto significa que para cada g en G, $\rho(g) \in \mathcal{C}(\rho)$.

3. Cada subespacio de V es ρ-invariante.

4. Sea $u \in V$, $u \neq \{0_V\}$. Entonces, $\mathbb{C}u$ es ρ-invariante.
Como ρ es irreducible, $V = \mathbb{C}u$.

1 Representaciones irreducibles de grupos conmutativos finitos

2 Diagonalización de representaciones de grupos conmutativos finitos

3 Ejemplo

Diagonalización de representaciones de grupos conmutativos finitos

Proposición

Sea G un grupo conmutativo finito,

sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita

y sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Entonces, existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que para cada g en G, la matriz $\rho(g)_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

Diagonalización de representaciones de grupos conmutativos finitos

Proposición

Sea G un grupo conmutativo finito,
sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita
y sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Entonces, existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que para cada g en G, la matriz $\rho(g)_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

En otras palabras, afirmamos que todos operadores del conjunto

$$\{\rho(g)\colon \ g \in G\}$$

se pueden diagonalizar de manera simultánea (hay una base que los diagonaliza todos).

Demostración: construcción de base

Por el teorema de Maschke, existen subespacios $W_1, \ldots, W_n$ de V tales que $W_1, \ldots, W_n$ son ρ-invariantes, ρ-irreducibles, y

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Demostración: construcción de base

Por el teorema de Maschke, existen subespacios $W_1, \ldots, W_n$ de V tales que $W_1, \ldots, W_n$ son ρ-invariantes, ρ-irreducibles, y

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Como G es conmutativo, $\dim(W_1) = \cdots = \dim(W_n) = 1$.

Demostración: construcción de base

Por el teorema de Maschke, existen subespacios $W_1, \ldots, W_n$ de V tales que $W_1, \ldots, W_n$ son ρ-invariantes, ρ-irreducibles, y

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Como G es conmutativo, $\dim(W_1) = \cdots = \dim(W_n) = 1$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, elegimos $b_j \in W_j \setminus \{0_V\}$.

Demostración: construcción de base

Por el teorema de Maschke, existen subespacios $W_1, \ldots, W_n$ de V tales que $W_1, \ldots, W_n$ son ρ-invariantes, ρ-irreducibles, y

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Como G es conmutativo, $\dim(W_1) = \cdots = \dim(W_n) = 1$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, elegimos $b_j \in W_j \setminus \{0_V\}$.

Pongamos $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_n)$.

Demostración: construcción de base

Por el teorema de Maschke, existen subespacios $W_1, \ldots, W_n$ de V tales que $W_1, \ldots, W_n$ son ρ-invariantes, ρ-irreducibles, y

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Como G es conmutativo, $\dim(W_1) = \cdots = \dim(W_n) = 1$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, elegimos $b_j \in W_j \setminus \{0_V\}$.

Pongamos $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_n)$.

La propiedad $V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n$ implica que

Demostración: construcción de base

Por el teorema de Maschke, existen subespacios $W_1, \ldots, W_n$ de V tales que $W_1, \ldots, W_n$ son ρ-invariantes, ρ-irreducibles, y

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Como G es conmutativo, $\dim(W_1) = \cdots = \dim(W_n) = 1$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, elegimos $b_j \in W_j \setminus \{0_V\}$.

Pongamos $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_n)$.

La propiedad $V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n$ implica que $\mathcal{B}$ es una base de V.

Demostración: construcción de base

Por el teorema de Maschke, existen subespacios $W_1, \ldots, W_n$ de V tales que $W_1, \ldots, W_n$ son ρ-invariantes, ρ-irreducibles, y

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Como G es conmutativo, $\dim(W_1) = \cdots = \dim(W_n) = 1$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, elegimos $b_j \in W_j \setminus \{0_V\}$.

Pongamos $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_n)$.

La propiedad $V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n$ implica que $\mathcal{B}$ es una base de V.

En particular, $\dim(V)$

Demostración: construcción de base

Por el teorema de Maschke, existen subespacios $W_1, \ldots, W_n$ de V tales que $W_1, \ldots, W_n$ son ρ-invariantes, ρ-irreducibles, y

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Como G es conmutativo, $\dim(W_1) = \cdots = \dim(W_n) = 1$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, elegimos $b_j \in W_j \setminus \{0_V\}$.

Pongamos $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_n)$.

La propiedad $V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n$ implica que $\mathcal{B}$ es una base de V.

En particular, $\dim(V) =$

Demostración: construcción de base

Por el teorema de Maschke, existen subespacios $W_1, \ldots, W_n$ de V tales que $W_1, \ldots, W_n$ son ρ-invariantes, ρ-irreducibles, y

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Como G es conmutativo, $\dim(W_1) = \cdots = \dim(W_n) = 1$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, elegimos $b_j \in W_j \setminus \{0_V\}$.

Pongamos $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_n)$.

La propiedad $V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n$ implica que $\mathcal{B}$ es una base de V.

En particular, $\dim(V) = n$.

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j$$

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in$$

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j$$

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j =$$

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j = \mathbb{C}b_j.$$

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j = \mathbb{C}b_j.$$

Por lo tanto, b_j es

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j = \mathbb{C}b_j.$$

Por lo tanto, b_j es un vector propio de $\rho(g)$.

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j = \mathbb{C}b_j.$$

Por lo tanto, b_j es un vector propio de $\rho(g)$.

Esto se cumple para cada j.

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j = \mathbb{C}b_j.$$

Por lo tanto, b_j es un vector propio de $\rho(g)$.

Esto se cumple para cada j. Luego, la matriz $\rho(g)_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j = \mathbb{C}b_j.$$

Por lo tanto, b_j es un vector propio de $\rho(g)$.

Esto se cumple para cada j. Luego, la matriz $\rho(g)_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

De manera más explícita, si $\rho(g)b_j = \lambda_{g,j}b_j$ para cada j, entonces

$$\rho(g)_{\mathcal{B}}$$

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j = \mathbb{C}b_j.$$

Por lo tanto, b_j es un vector propio de $\rho(g)$.

Esto se cumple para cada j. Luego, la matriz $\rho(g)_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

De manera más explícita, si $\rho(g)b_j = \lambda_{g,j}b_j$ para cada j, entonces

$$\rho(g)_{\mathcal{B}} =$$

Demostración: las matrices asociadas son diagonales

Sea g en G.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, sabemos que W_j es ρ-invariante y $W_j = \mathbb{C}b_j$.

Por lo tanto,

$$\rho(g)b_j \in W_j = \mathbb{C}b_j.$$

Por lo tanto, b_j es un vector propio de $\rho(g)$.

Esto se cumple para cada j. Luego, la matriz $\rho(g)_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

De manera más explícita, si $\rho(g)b_j = \lambda_{g,j}b_j$ para cada j, entonces

$$\rho(g)_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_{g,1}, \ldots, \lambda_{g,n}).$$

Diagonalización de representaciones matriciales de grupos conmutativos finitos

Proposición

Sea G un grupo conmutativo finito y sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ una representación matricial.

Entonces, existe P en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tal que para cada g en G, la matriz $P^{-1}\rho(g)P$ es diagonal.

Diagonalización de representaciones matriciales de grupos conmutativos finitos

Proposición

Sea G un grupo conmutativo finito y sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ una representación matricial.

Entonces, existe P en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tal que para cada g en G, la matriz $P^{-1}\rho(g)P$ es diagonal.

Es un corolario de la proposición anterior.

Diagonalización de las matrices con la propiedad $A^m = I_n$

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $A^m = I_n$.

Entonces, A es diagonalizable y

$$\mathrm{sp}(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \ z^m = 1\}.$$

Diagonalización de las matrices con la propiedad $A^m = I_n$

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $A^m = I_n$.

Entonces, A es diagonalizable y

$$\mathrm{sp}(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \ z^m = 1\}.$$

Como $f(x) = x^n - 1$ es un polinomio anulador de A y sus raíces son simples, se puede aplicar el criterio de matriz diagonalizable.

Diagonalización de las matrices con la propiedad $A^m = I_n$

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $A^m = I_n$.

Entonces, A es diagonalizable y

$$\mathrm{sp}(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \ z^m = 1\}.$$

Como $f(x) = x^n - 1$ es un polinomio anulador de A y sus raíces son simples, se puede aplicar el criterio de matriz diagonalizable.

Veamos otra demostración basada en la teoría de representaciones.

Demostración: diagonalización

Definimos $\rho\colon \mathbb{Z}_m \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$,

$$\rho(k+m\mathbb{Z}) := A^k.$$

La suposición $A^m = I_n$ implica que esta definición es consistente y ρ es un representación.

Demostración: diagonalización

Definimos $\rho\colon \mathbb{Z}_m \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$,

$$\rho(k+m\mathbb{Z}) \coloneqq A^k.$$

La suposición $A^m = I_n$ implica que esta definición es consistente y ρ es un representación.

Como $\mathbb{Z}_m$ es conmutativo, existe P en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tal que para cada k en $\mathbb{Z}$,
la matriz $P^{-1}\rho(k+m\mathbb{Z})P$ es diagonal.

Demostración: diagonalización

Definimos $\rho\colon \mathbb{Z}_m \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$,

$$\rho(k+m\mathbb{Z}) \coloneqq A^k.$$

La suposición $A^m = I_n$ implica que esta definición es consistente y ρ es un representación.

Como $\mathbb{Z}_m$ es conmutativo, existe P en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tal que para cada k en $\mathbb{Z}$,
la matriz $P^{-1}\rho(k+m\mathbb{Z})P$ es diagonal.

En particular, para $k=1$, la siguiente matriz es diagonal:

$$D \coloneqq P^{-1}AP.$$

Demostración: espectro

Sea $D \coloneqq P^{-1}AP$. La matriz D es diagonal:

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Demostración: espectro

Sea $D \coloneqq P^{-1}AP$. La matriz D es diagonal:

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

De la propiedad $A^m = I_n$ se sigue que

Demostración: espectro

Sea $D \coloneqq P^{-1}AP$. La matriz D es diagonal:

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

De la propiedad $A^m = I_n$ se sigue que $D^m = I$.

Demostración: espectro

Sea $D \coloneqq P^{-1}AP$. La matriz D es diagonal:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

De la propiedad $A^m = I_n$ se sigue que $D^m = I$.

Luego, para cada k en $\{1, \ldots, n\}$,

$$\lambda_k^m = 1.$$

Demostración: espectro

Sea $D \coloneqq P^{-1}AP$. La matriz D es diagonal:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

De la propiedad $A^m = I_n$ se sigue que $D^m = I$.

Luego, para cada k en $\{1, \ldots, n\}$,

$$\lambda_k^m = 1.$$

Esto significa que

$$\operatorname{sp}(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \colon \ z^m = 1\}.$$

1 Representaciones irreducibles de grupos conmutativos finitos

2 Diagonalización de representaciones de grupos conmutativos finitos

3 Ejemplo

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 =$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 =$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Como el grupo G es conmutativo y $\dim(V) = 2$, concluimos que

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Como el grupo G es conmutativo y $\dim(V) = 2$, concluimos que ρ es reducible (tiene un subespacio invariante de dimensión 1).

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Como el grupo G es conmutativo y $\dim(V) = 2$, concluimos que ρ es reducible (tiene un subespacio invariante de dimensión 1).

Concluimos que $\mathcal{C}(\rho)$ contiene no solamente matrices escalares.

Ejemplo: calculemos $\mathcal{C}(\rho)$ de manera explícita

Obviamente, $X \in \mathcal{C}(\rho)$ ssi $AX - XA = 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} AX - XA &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ -X_{1,1} - X_{2,1} & -X_{1,2} - X_{2,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -X_{1,2} & X_{1,1} - X_{1,2} \\ -X_{2,2} & X_{2,1} - X_{2,2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_{1,2} + X_{2,1} & -X_{1,1} + X_{1,2} + X_{2,2} \\ -X_{1,1} - X_{2,1} + X_{2,2} & -X_{1,2} - X_{2,1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo: la forma explícita de $\mathcal{C}(\rho)$

$$X \in \mathcal{C}(\rho) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} X_{1,2} + X_{2,1} & -X_{1,1} + X_{1,2} + X_{2,2} \\ -X_{1,1} - X_{2,1} + X_{2,2} & -X_{1,2} - X_{2,1} \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}.$$

Encontramos la forma general de los elementos de $\mathcal{C}(\rho)$:

$$X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ -X_{1,2} & X_{1,1} - X_{1,2} \end{bmatrix} = X_{1,1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + X_{1,2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Conclusión:

$$\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I + \mathbb{C}\, A.$$