

Subespacios invariantes y subrepresentaciones (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

<https://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

27 de septiembre de 2026

Objetivos de este tema

- introducir el concepto de subespacio invariante y conocer ejemplos;
- mostrar que el núcleo y la imagen de un morfismo son subespacios invariantes;
- introducir el concepto de subrepresentación.

Estamos trabajando con grupos finitos

y sus representaciones lineales en espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Prerrequisitos para este tema

- representación lineal de grupo finito;
- subespacio invariante de un operador lineal.

- 1 Subespacios invariantes de representaciones
- 2 Núcleos e imágenes de morfismos son subespacios invariantes
- 3 Subrepresentaciones

1 Subespacios invariantes de representaciones

2 Núcleos e imágenes de morfismos son subespacios invariantes

3 Subrepresentaciones

Repaso: representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos
y solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dado un espacio vectorial V , denotamos por $GL(V)$ al grupo de sus automorfismos (isomorfismos $V \rightarrow V$).

Una **representación** (lineal) de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho: G \rightarrow GL(V)$.

Si $\dim(V) = n$, se dice que n es el grado de la representación ρ .

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V .

Se dice que W es un subespacio **invariante** o **estable** respecto a ρ , si

$$\forall g \in G \quad \forall w \in W \quad \rho(g)w \in W.$$

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V .

Se dice que W es un subespacio **invariante** o **estable** respecto a ρ , si

$$\forall g \in G \quad \forall w \in W \quad \rho(g)w \in W.$$

También se dice que W es ρ -estable, es un ρ -subespacio de V (o G -subespacio de V).

Ejemplo trivial: $\{0_V\}$

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación, entonces $\{0_V\}$ es un subespacio ρ -invariante.

Ejemplo trivial: $\{0_V\}$

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación, entonces $\{0_V\}$ es un subespacio ρ -invariante.

Demostración. Para cada g en G ,

$$\rho(g)0_V = 0_V \in \{0_V\}.$$

Otro ejemplo trivial: V

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación, entonces V es un subespacio ρ -invariante.

Otro ejemplo trivial: V

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación, entonces V es un subespacio ρ -invariante.

Demostración. Para cada g en G y cada v en V ,

$$\rho(g)v \in V.$$

Ejemplo: representación matricial regular

Sean $V = \mathbb{C}^n$, $G = S_n$, es decir, G es el grupo de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$.

Para cada φ en S_n , sea P_φ la matriz de permutación correspondiente:

$$P_\varphi := [\delta_{j, \varphi(k)}]_{j,k=1}^n.$$

Por ejemplo, para $n = 4$,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo: representación matricial regular

Definimos $\rho: S_n \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(\varphi) := P_\varphi.$$

Proposición

ρ es una representación.

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Para cada j, k en $\{1, \dots, n\}$,

$$(P_\varphi P_\psi)_{j,k} = \sum_{r=1}^n \delta_{j,\varphi(r)} \delta_{r,\psi(k)} \xrightarrow{\text{sumando con } r=\psi(k)} \delta_{j,\varphi(\psi(k))} = (P_{\varphi\psi})_{j,k}.$$

Ejemplo: un subespacio invariante de la representación matricial regular

Sea u el vector en $\mathbb{C}^n$ con todas las componentes iguales a 1:

$$u := \sum_{j=1}^n e_j = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pongamos

$$W_1 := \mathbb{C}u, \quad \text{esto es,} \quad W_1 = \text{lin}(u).$$

Para cada φ en S_n tenemos que $P_\varphi u = u$, por eso

$$\rho(\varphi)W_1 \subseteq W_1.$$

Ejemplo: otro subespacio invariante de la representación matricial regular

$$W_2 := \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n x_j = 0 \right\}.$$

Una base de W_2 :

$$e_1 - e_n, \quad e_2 - e_n, \quad \dots, \quad e_{n-1} - e_n.$$

Mostremos que W_2 es ρ -invariante.

Si $\varphi \in S_n$, $x \in W_2$, $y = \rho(\varphi)x$, entonces

$$\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^n x_{\varphi^{-1}(j)} \stackrel{k=\varphi^{-1}(j)}{=} \sum_{k=1}^n x_k = 0.$$

- 1 Subespacios invariantes de representaciones
- 2 Núcleos e imágenes de morfismos son subespacios invariantes
- 3 Subrepresentaciones

Morfismo entre representaciones

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G .

Un morfismo entre ρ y σ es una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ tal que

$$\forall g \in G \quad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$

A commutative diagram illustrating the relationship between two representations ρ and σ via a linear transformation T . The diagram consists of two horizontal rows of vector spaces. The top row has V on the left and W on the right, connected by a horizontal arrow labeled T . The bottom row also has V on the left and W on the right, connected by a horizontal arrow labeled T . A vertical arrow labeled $\rho(g)$ points from the V in the top row down to the V in the bottom row. Another vertical arrow labeled $\sigma(g)$ points from the W in the top row down to the W in the bottom row.

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v)$$

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) =$$

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = (T\rho(g))v$$

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = (T\rho(g))v =$$

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = (T\rho(g))v = (\sigma(g)T)v$$

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = (T\rho(g))v = (\sigma(g)T)v =$$

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = (T\rho(g))v = (\sigma(g)T)v = \sigma(g)(Tv)$$

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = (T\rho(g))v = (\sigma(g)T)v = \sigma(g)(Tv) =$$

El núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = (T\rho(g))v = (\sigma(g)T)v = \sigma(g)(Tv) = \sigma(g)0_W = 0_W,$$

así que $\rho(g)v \in \ker(T)$.

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.
Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.
Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w =$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.
Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w = \sigma(g)(Tv)$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.
Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w = \sigma(g)(Tv) =$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.

Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w = \sigma(g)(Tv) = (\sigma(g)T)v$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.

Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w = \sigma(g)(Tv) = (\sigma(g)T)v =$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.

Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w = \sigma(g)(Tv) = (\sigma(g)T)v = (T\rho(g))v$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.

Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w = \sigma(g)(Tv) = (\sigma(g)T)v = (T\rho(g))v =$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.

Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w = \sigma(g)(Tv) = (\sigma(g)T)v = (T\rho(g))v = T(\rho(g)v)$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.

Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w = \sigma(g)(Tv) = (\sigma(g)T)v = (T\rho(g))v = T(\rho(g)v) \in$$

La imagen de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\text{im}(T)$ es σ -invariante.

Demostración. Sean $w \in \text{im}(T)$ y $g \in G$.

Encontramos v en V tal que $w = Tv$. Luego

$$\sigma(g)w = \sigma(g)(Tv) = (\sigma(g)T)v = (T\rho(g))v = T(\rho(g)v) \in \text{im}(T).$$

El centralizador (conmutante) de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación.

El **centralizador** de ρ se define como el conjunto de todos los morfismos entre ρ y ρ :

$$\mathcal{C}(\rho) := \text{Hom}_{G, \rho, \rho}(V, W) := \left\{ T \in \text{L}(V) : \quad \forall g \in G \quad T\rho(g) = \rho(g)T \right\}.$$

Es fácil de ver que $\mathcal{C}(\rho)$ es una subálgebra de $\text{L}(V)$. Más aún, $I \in \mathcal{C}(\rho)$.

A commutative diagram illustrating the property of the centralizer. It consists of four vertices arranged in a square. The top-left and top-right vertices are both labeled V . The bottom-left and bottom-right vertices are also both labeled V . A horizontal arrow points from the top-left V to the top-right V , labeled T above it. A horizontal arrow points from the bottom-left V to the bottom-right V , labeled T above it. A vertical arrow points from the top-left V down to the bottom-left V , labeled $\rho(g)$ to its left. A vertical arrow points from the top-right V down to the bottom-right V , labeled $\rho(g)$ to its right.

Si un operador pertenece al centralizador de una representación, entonces su núcleo e imagen son invariantes

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación del grupo G y $T \in \mathcal{C}(\rho)$, entonces $\ker(T)$ e $\text{im}(T)$ son ρ -subespacios de V .

Si un operador pertenece al centralizador de una representación, entonces su núcleo e imagen son invariantes

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación del grupo G y $T \in \mathcal{C}(\rho)$, entonces $\ker(T)$ e $\text{im}(T)$ son ρ -subespacios de V .

Es un corolario de las proposiciones anteriores.

Ejemplo: el núcleo y la imagen de una matriz circulante

Sean $G = \mathbb{Z}_4$, $V = \mathbb{C}^4$, $\rho: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{GL}_4(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 4\mathbb{Z}) := S^k, \quad S := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $S^4 = I_4$, la definición de ρ es consistente,
y ρ es una representación.

Ejemplo: el núcleo y la imagen de una matriz circulante

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_S.$$

A conmuta con S , por eso $A \in \mathcal{C}(\rho)$.

Ejemplo: el núcleo y la imagen de una matriz circulante

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

El núcleo y la imagen de A :

$$\ker(A) = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \quad \text{im}(A) = \ker(A)^\perp = \{x \in \mathbb{C}^4 : x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0\}.$$

Estos subespacios son S -invariantes y por eso ρ -invariantes.

- 1 Subespacios invariantes de representaciones
- 2 Núcleos e imágenes de morfismos son subespacios invariantes
- 3 Subrepresentaciones

Subrepresentación

Suponemos que $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación
y W es un subespacio de V invariante respecto a ρ .

Subrepresentación

Suponemos que $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación y W es un subespacio de V invariante respecto a ρ .

Para cada g en G , definimos $\rho_W(g): W \rightarrow W$,

$$\rho_W(g)v := \rho(g)v.$$

En otras palabras, $\rho_W(g) = \rho(g) \upharpoonright_W^W$. Estamos restringiendo el dominio y el codominio.

Es fácil ver que $\rho_W(g) \in \text{GL}(W)$ y

$$\rho_W(g)\rho_W(h) = \rho_W(gh).$$

Subrepresentación

Suponemos que $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ es una representación y W es un subespacio de V invariante respecto a ρ .

Para cada g en G , definimos $\rho_W(g): W \rightarrow W$,

$$\rho_W(g)v := \rho(g)v.$$

En otras palabras, $\rho_W(g) = \rho(g) \upharpoonright_W^W$. Estamos restringiendo el dominio y el codominio.

Es fácil ver que $\rho_W(g) \in \mathrm{GL}(W)$ y

$$\rho_W(g)\rho_W(h) = \rho_W(gh).$$

Concluimos que $\rho_W: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ es una representación.

Subrepresentación

Suponemos que $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación y W es un subespacio de V invariante respecto a W .

Definimos $\rho_W: G \rightarrow \text{GL}(W)$,

$$\rho_W(g)v := \rho(g)v.$$

Se dice que ρ_W es una subrepresentación de ρ .

Ejemplo: representación regular abstracta

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

Consideramos la representación regular:

$$\rho(g)b_t := b_{gt}.$$

Ejemplo: representación regular abstracta

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

Consideramos la representación regular:

$$\rho(g)b_t := b_{gt}.$$

Pongamos

$$u := \sum_{t \in G} b_t, \quad W := \mathbb{C}u.$$

Es fácil ver que $\rho(g)u = u$ para cada g en G .

Ejemplo: representación regular abstracta

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

Consideramos la representación regular:

$$\rho(g)b_t := b_{gt}.$$

Pongamos

$$u := \sum_{t \in G} b_t, \quad W := \mathbb{C}u.$$

Es fácil ver que $\rho(g)u = u$ para cada g en G .

Por lo tanto, W es un subespacio invariante. En este ejemplo, ρ_W es la representación trivial.