

Cada representación lineal es unitaria respecto a cierto producto interno

Egor Maximenko y Juan Osornio Uribe

<https://esfm.egormaximenko.com>

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México

31 de agosto de 2026

- 1 Definiciones
- 2 Repaso: combinaciones lineales estrictamente positivas de productos internos
- 3 Repaso: multiplicación por un elemento fijo en un grupo
- 4 Construcción principal

Representaciones lineales de grupos finitos (repaso)

Sea G un grupo finito.

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

Denotamos por $GL(V)$ al grupo de los operadores lineales invertibles $V \rightarrow V$.

Una **representación lineal** de G en V es un homomorfismo $G \rightarrow GL(V)$.

En lo que sigue, decimos “representación” en vez de “representación lineal”.

Isometrías lineales

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita, con producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Isometrías lineales

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita, con producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Se definen la norma inducida y la distancia inducida:

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Un operador lineal $T: H \rightarrow H$ se llama **isométrico** (o **isometría lineal**) si es isométrico con respecto a la distancia inducida por el producto interno:

$$d(T\mathbf{u}, T\mathbf{v}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H).$$

Criterio de isometría lineal

Si $T: H \rightarrow H$ es un operador lineal, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\underbrace{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|T(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|}$$

Preserva la distancia entre vectores

Criterio de isometría lineal

Si $T: H \rightarrow H$ es un operador lineal, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\underbrace{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|T(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|}_{\text{Preserva la distancia entre vectores}} \iff \underbrace{\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|}_{\text{Preserva la norma}}$$

Criterio de isometría lineal

Si $T: H \rightarrow H$ es un operador lineal, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\underbrace{\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| = \| T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \|}_{\text{Preserva la distancia entre vectores}} \iff \underbrace{\| T(\mathbf{u}) \| = \| \mathbf{u} \|}_{\text{Preserva la norma}} \iff \underbrace{\langle T(\mathbf{u}) | T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}_{\text{Preserva el producto interno}}.$$

Criterio de isometría lineal

Si $T: H \rightarrow H$ es un operador lineal, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\underbrace{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|T(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|}_{\text{Preserva la distancia entre vectores}} \iff \underbrace{\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|}_{\text{Preserva la norma}} \iff \underbrace{\langle T(\mathbf{u}) | T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}_{\text{Preserva el producto interno}}.$$

Para demostrar la última flecha $\implies$,

Criterio de isometría lineal

Si $T: H \rightarrow H$ es un operador lineal, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\underbrace{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|T(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|}_{\text{Preserva la distancia entre vectores}} \iff \underbrace{\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|}_{\text{Preserva la norma}} \iff \underbrace{\langle T(\mathbf{u}) | T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}_{\text{Preserva el producto interno}}.$$

Para demostrar la última flecha $\implies$, se utiliza la identidad de polarización:

$$\langle T(\mathbf{u}) | T(\mathbf{v}) \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|T(\mathbf{u} + i^k \mathbf{v})\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|\mathbf{u} + i^k \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle.$$

Operadores unitarios

Un operador lineal $T: H \rightarrow H$ se llama **unitario** si es invertible e isométrico.

Operadores unitarios

Un operador lineal $T: H \rightarrow H$ se llama **unitario** si es invertible e isométrico.

Denotemos por $\mathcal{U}(H)$ al conjunto de los operadores unitarios $H \rightarrow H$.

Operadores unitarios

Un operador lineal $T: H \rightarrow H$ se llama **unitario** si es invertible e isométrico.

Denotemos por $\mathcal{U}(H)$ al conjunto de los operadores unitarios $H \rightarrow H$.

Ya que la composición de operadores unitarios da como resultado otro operador unitario y el inverso de un operador unitario es unitario, $\mathcal{U}(H)$ es un grupo.

Representaciones unitarias

Sea G un grupo finito y sea H un espacio de Hilbert.

Representaciones unitarias

Sea G un grupo finito y sea H un espacio de Hilbert.

Una **representación unitaria** de G en H es una representación que toma valores en $\mathcal{U}(H)$.

Representaciones unitarias

Sea G un grupo finito y sea H un espacio de Hilbert.

Una **representación unitaria** de G en H es una representación que toma valores en $\mathcal{U}(H)$.

Es decir, una representación $\rho: G \rightarrow \text{GL}(H)$ tal que

$$\langle \rho(g)\mathbf{u} \mid \rho(g)\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, g \in G).$$

Existencia de un producto interno en un espacio vectorial de dimensión finita

Proposición

En todo espacio vectorial complejo de dimensión finita existe un producto interno.

Demostración, inicio

Sea V un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita n y sea $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ una base ordenada.

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad \exists! (v_1, \dots, v_n) : \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n v_k \mathbf{b}_k \implies T(\mathbf{v}) := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

T es un isomorfismo entre V y $\mathbb{C}^n$.

Demostración, final

$\mathbb{C}^n$ está provisto de un producto interno canónico:

$$\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}.$$

Demostración, final

$\mathbb{C}^n$ está provisto de un producto interno canónico:

$$\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}.$$

Construimos el producto interno en V usando el de $\mathbb{C}^n$ y el isomorfismo T :

$$\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle_V := \langle T\mathbf{u} \mid T\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

Demostración, final

$\mathbb{C}^n$ está provisto de un producto interno canónico:

$$\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}.$$

Construimos el producto interno en V usando el de $\mathbb{C}^n$ y el isomorfismo T :

$$\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle_V := \langle T\mathbf{u} \mid T\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

Las propiedades del producto interno se verifican fácilmente.

Demostración, final

$\mathbb{C}^n$ está provisto de un producto interno canónico:

$$\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}.$$

Construimos el producto interno en V usando el de $\mathbb{C}^n$ y el isomorfismo T :

$$\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle_V := \langle T\mathbf{u} \mid T\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

Las propiedades del producto interno se verifican fácilmente.

Por ejemplo, si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_V$, entonces $T\mathbf{u} \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_V = \langle T\mathbf{u}, T\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}^n} > 0$.

Repaso: combinaciones lineales positivas de productos internos

Proposición (Múltiplo positivo de un producto interno)

Si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ es un producto interno en V y $\alpha > 0$, entonces $\alpha \langle \cdot | \cdot \rangle$ es un producto interno.

Repaso: combinaciones lineales positivas de productos internos

Proposición (Múltiplo positivo de un producto interno)

Si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ es un producto interno en V y $\alpha > 0$, entonces $\alpha \langle \cdot | \cdot \rangle$ es un producto interno.

Proposición (Combinación lineal positiva de productos internos)

Si $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ son productos internos en V ,
 $\alpha, \beta \geq 0$ y al menos uno es estrictamente positivo, entonces

$$\alpha \langle \cdot | \cdot \rangle_1 + \beta \langle \cdot | \cdot \rangle_2$$

es un producto interno.

Multiplicación por un elemento fijo en un grupo

Sea G un grupo. Para cada a en G , definimos

$$R_a: G \rightarrow G, \quad R_a(g) := ga.$$

Multiplicación por un elemento fijo en un grupo

Sea G un grupo. Para cada a en G , definimos

$$R_a: G \rightarrow G, \quad R_a(g) := ga.$$

Notamos que si $a, b \in G$, entonces

$$(R_a \circ R_b)(g) = R_b(g)a = (gb)a = g(ba) = R_{ba}(g).$$

Multiplicación por un elemento fijo en un grupo

Sea G un grupo. Para cada a en G , definimos

$$R_a: G \rightarrow G, \quad R_a(g) := ga.$$

Notamos que si $a, b \in G$, entonces

$$(R_a \circ R_b)(g) = R_b(g)a = (gb)a = g(ba) = R_{ba}(g).$$

En particular, $R_a R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} R_a = R_{1_G} = \text{id}_G$.

Multiplicación por un elemento fijo en un grupo

Sea G un grupo. Para cada a en G , definimos

$$R_a: G \rightarrow G, \quad R_a(g) := ga.$$

Notamos que si $a, b \in G$, entonces

$$(R_a \circ R_b)(g) = R_b(g)a = (gb)a = g(ba) = R_{ba}(g).$$

En particular, $R_a R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} R_a = R_{1_G} = \text{id}_G$.

Proposición

Para cada a en G , R_a es una biyección.

Multiplicación por la izquierda

Para cada a en G , definimos

$$L_a: G \rightarrow G, \quad L_a(g) := ag.$$

Multiplicación por la izquierda

Para cada a en G , definimos

$$L_a: G \rightarrow G, \quad L_a(g) := ag.$$

Dados a, b en G , calcule

$$L_a \circ L_b.$$

Multiplicación por la izquierda

Para cada a en G , definimos

$$L_a: G \rightarrow G, \quad L_a(g) := ag.$$

Dados a, b en G , calcule

$$L_a \circ L_b.$$

Proposición

Para cada a en G , L_a es una biyección.

Construcción principal

Teorema

Si G es un grupo finito,

V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita

y $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación,

entonces en V existe un producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ tal que ρ es unitaria respecto a $\langle \cdot | \cdot \rangle$:

$$\forall g \in G \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad \langle \rho(g)\mathbf{u} | \rho(g)\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle.$$

Demostración

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ un producto interno en V .

Demostración

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ un producto interno en V .

Para cada $g \in G$, la aplicación:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \rho(g)\mathbf{u} \mid \rho(g)\mathbf{v} \rangle_V \quad (\text{con } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V)$$

también es un producto interno en V .

Demostración

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ un producto interno en V .

Para cada $g \in G$, la aplicación:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \rho(g)\mathbf{u} \mid \rho(g)\mathbf{v} \rangle_V \quad (\text{con } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V)$$

también es un producto interno en V .

La aplicación es lineal con respecto a su primer argumento,
es no negativa y es simétrica conjugada,

Demostración

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación y sea $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ un producto interno en V .

Para cada $g \in G$, la aplicación:

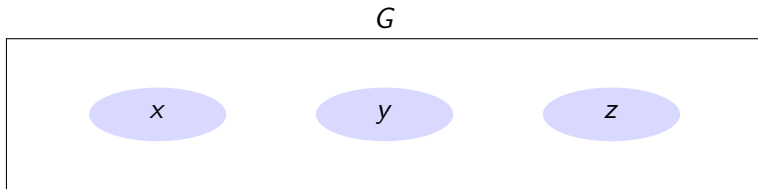
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \rho(g)\mathbf{u} | \rho(g)\mathbf{v} \rangle_V \quad (\text{con } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V)$$

también es un producto interno en V .

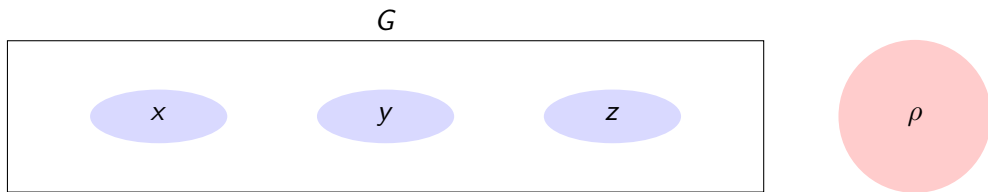
La aplicación es lineal con respecto a su primer argumento,
es no negativa y es simétrica conjugada, además

$$\langle \rho(g)\mathbf{u} | \rho(g)\mathbf{u} \rangle_V = 0 \implies \rho(g)\mathbf{u} = \mathbf{0} \xrightarrow{\rho(g) \in \text{GL}(V)} \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

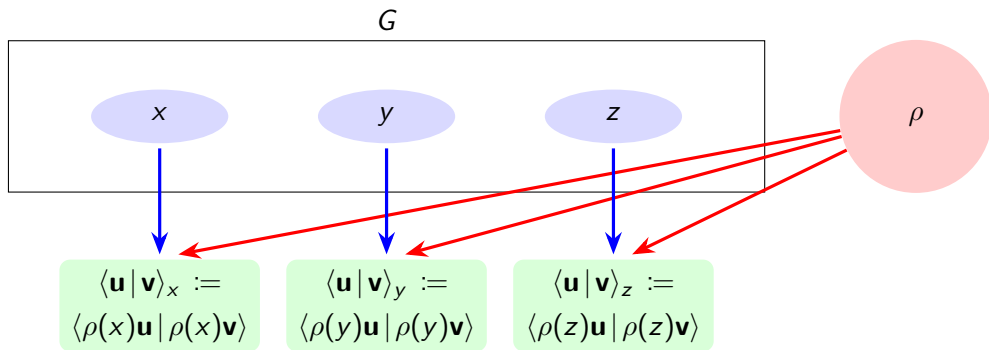
Construcción de un producto interno G -invariante



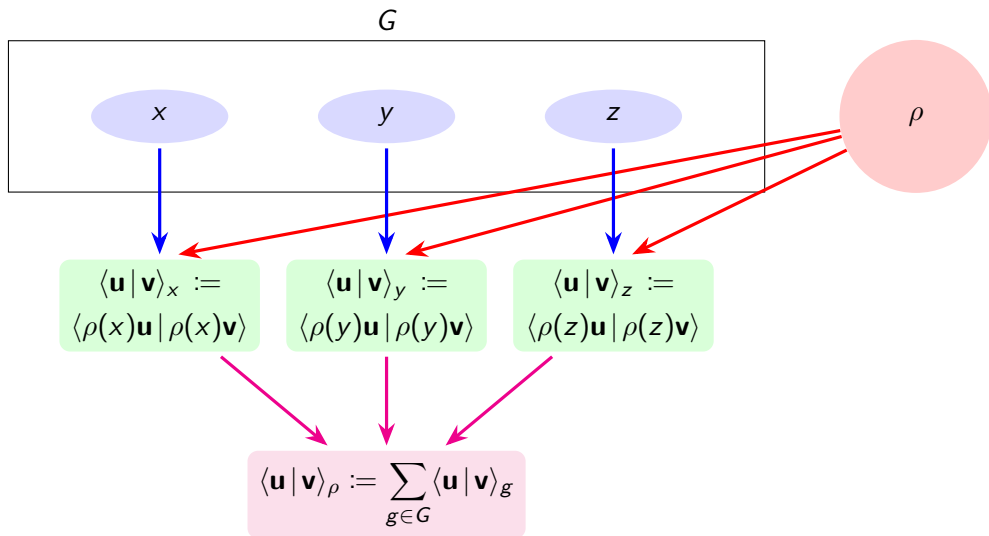
Construcción de un producto interno G -invariante



Construcción de un producto interno G -invariante



Construcción de un producto interno G -invariante



Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho =$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle =$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle.$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle.$$

La función $R_h: G \rightarrow G$, $R_h(g) := gh$, es una biyección.

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle.$$

La función $R_h: G \rightarrow G$, $R_h(g) := gh$, es una biyección.

La usamos para hacer el cambio de variable $t = gh$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle.$$

La función $R_h: G \rightarrow G$, $R_h(g) := gh$, es una biyección.

La usamos para hacer el cambio de variable $t = gh$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho =$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle.$$

La función $R_h: G \rightarrow G$, $R_h(g) := gh$, es una biyección.

La usamos para hacer el cambio de variable $t = gh$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle.$$

La función $R_h: G \rightarrow G$, $R_h(g) := gh$, es una biyección.

La usamos para hacer el cambio de variable $t = gh$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle =$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle.$$

La función $R_h: G \rightarrow G$, $R_h(g) := gh$, es una biyección.

La usamos para hacer el cambio de variable $t = gh$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle = \sum_{t \in G} \langle \rho(t)\mathbf{u} \mid \rho(t)\mathbf{v} \rangle$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle.$$

La función $R_h: G \rightarrow G$, $R_h(g) := gh$, es una biyección.

La usamos para hacer el cambio de variable $t = gh$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle = \sum_{t \in G} \langle \rho(t)\mathbf{u} \mid \rho(t)\mathbf{v} \rangle =$$

Demostración

Veamos la interacción de la representación ρ con el producto interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(g)\rho(h)\mathbf{v} \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle.$$

La función $R_h: G \rightarrow G$, $R_h(g) := gh$, es una biyección.

La usamos para hacer el cambio de variable $t = gh$:

$$\langle \rho(h)\mathbf{u} \mid \rho(h)\mathbf{v} \rangle_\rho = \sum_{g \in G} \langle \rho(gh)\mathbf{u} \mid \rho(gh)\mathbf{v} \rangle = \sum_{t \in G} \langle \rho(t)\mathbf{u} \mid \rho(t)\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle_\rho.$$