Suma directa de representaciones

Egor Maximenko y Evelyn Sánchez Dorantes

https://esfm.egormaximenko.com

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México

19 de octubre de 2026

Objetivos

- Definir la suma directa de dos representaciones de un grupo G.
- Repasar el concepto de subrepresentaciones.
- Relacionar estos conceptos entre si.

Prerrequisitos

Para entender bien este tema, se recomienda saber los siguientes conceptos:

- representación;
- subespacio invariante y subrepresentación;
- representaciones equivalentes;
- descomposición de espacios vectoriales en sumas directas;
- sumas directas (“externas”) de espacios vectoriales.

Plan

1. Repaso: la suma directa de espacios vectoriales y la suma directa de subespacios
2. Sumas directas de representaciones
3. Ejemplos

Repaso: la suma directa ("externa") de espacios vectoriales

Sean V_1, V_2 espacios vectoriales.

$V_1 \oplus V_2$ se define como el conjunto $V_1 \times V_2$ (el producto cartesiano) con operaciones lineales por componentes:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) \coloneqq (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$\lambda(a_1, a_2) \coloneqq (\lambda a_1, \lambda a_2).$$

Es fácil ver que $V_1 \oplus V_2$ es un espacio vectorial.

Descomposición de un espacio vectorial en una suma directa

Sea V un espacio vectorial complejo y sean W_1, W_2 subespacios vectoriales de V.
Se dice que V es una suma directa de W_1 y W_2 y se escribe $V = W_1 \dotplus W_2$ si

$$V = W_1 + W_2$$

y

$$W_1 \cap W_2 = \{0_V\}.$$

Lo anterior equivale a que para cada $a \in V$, $\exists!(u, v) \in W_1 \times W_2$ tal que $a = u + v$.

Pasar de una suma directa interior a una suma directa externa

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean W_1, W_2 subespacios de V tales que

$$V = W_1 \dot{+} W_2.$$

Definimos $T\colon W_1 \oplus W_2 \to V$,

$$T(a, b) \coloneqq a + b.$$

Entonces, T es un isomorfismo de espacios vectoriales y

$$V \cong W_1 \oplus W_2.$$

Demostración

Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in W_1 \oplus W_2$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

T es lineal:

$$\begin{aligned} T(\lambda(a_1, a_2) + (b_1, b_2)) &= T(\lambda a_1 + b_1, \lambda a_2 + b_2) \\ &= (\lambda a_1 + b_1) + (\lambda a_2 + b_2) \\ &= \lambda(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ &= \lambda T(a_1, a_2) + T(b_1, b_2). \end{aligned}$$

Mostremos que T es inyectiva.
Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in W_1 \oplus W_2$ tales que $T(a_1, a_2) = T(b_1, b_2)$. Luego

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2.$$

Como $V = W_1 \dot{+} W_2$ y tenemos que $a_1, b_1 \in W_1$ y $a_2, b_2 \in W_2$,
entonces $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$, así que $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

Mostremos que T es sobreyectiva.
Sea $a \in V$. Luego $\exists!(u, v) \in W_1 \times W_2$ tal que $a = u + v$.
Con este par (u, v) obtenemos que $T(u, v) = u + v = a$.

Plan

1. Repaso: la suma directa de espacios vectoriales y la suma directa de subespacios
2. Sumas directas de representaciones
3. Ejemplos

La suma directa de dos representaciones

Sea G un grupo y sean V_1, V_2 espacios vectoriales complejos.

Sean $\rho_1 \colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ y $\rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ representaciones.

Definimos $\rho_1 \oplus \rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2)$,

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(x, y) \coloneqq (\rho_1(g)(x), \rho_2(g)(y)).$$

Repaso: subespacio invariante y subrepresentación

Dada $\rho\colon G \to GL(V)$ una representación y W un subespacio de V,
se dice que W es ρ-invariante si $\forall g \in G$, W es $\rho(g)$-invariante, es decir,

$$\forall g \in G \qquad \rho(g)[W] \subseteq W.$$

Si W es ρ-invariante, para cada g en G podemos hablar de la compresión de $\rho(g)$ al subespacio W, $\rho(g) \restriction_W^W \colon W \to W$ que, para cada $w \in W$, está dada por $\rho(g) \restriction_W^W (w) = \rho(g)(w)$.

Notación: en el contexto anterior podemos hablar de la subrepresentación $\rho_W\colon G \to GL(W)$, definida por

$$\rho_W(g) \coloneqq \rho(g) \restriction_W^W .$$

Pasar de la descomposición en subespacios invariantes a la suma directa de representaciones

Proposición

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sean W_1, W_2 subespacios ρ-invariantes tales que

$$V = W_1 \dot{+} W_2.$$

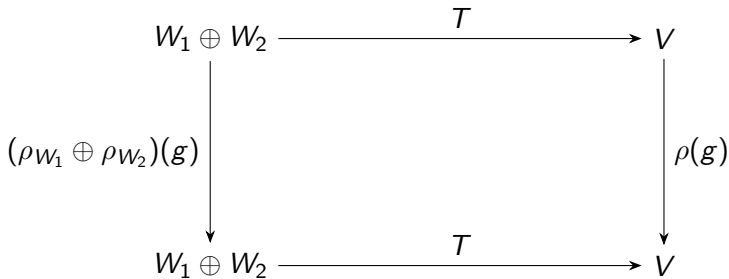
Definimos $T\colon W_1 \oplus W_2 \to V$,

$$T(a, b) \coloneqq a + b.$$

Entonces, T es un isomorfismo de representaciones $\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2}$ y ρ:

$$\forall g \in G \qquad T(\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2})(g) = \rho(g)\,T.$$

T intercala las representaciones $\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2}$ y ρ



Demostración

Como $V = W_1 \dot{+} W_2$, sabemos que T es un isomorfismo entre $W_1 \oplus W_2$ y V.

Demostración

Como $V = W_1 \dot{+} W_2$, sabemos que T es un isomorfismo entre $W_1 \oplus W_2$ y V.

Si $(a, b) \in W_1 \oplus W_2$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2})(g)(a, b)$$

Demostración

Como $V = W_1 \dot{+} W_2$, sabemos que T es un isomorfismo entre $W_1 \oplus W_2$ y V.

Si $(a, b) \in W_1 \oplus W_2$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2})(g)(a, b) = T(\rho_{W_1}(g)(a), \rho_{W_2}(g)(b))$$

Demostración

Como $V = W_1 \dotplus W_2$, sabemos que T es un isomorfismo entre $W_1 \oplus W_2$ y V.

Si $(a, b) \in W_1 \oplus W_2$ y $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} T(\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2})(g)(a, b) &= T(\rho_{W_1}(g)(a), \rho_{W_2}(g)(b)) \\ &= \rho_{W_1}(g)(a) + \rho_{W_2}(g)(b) \end{aligned}$$

Demostración

Como $V = W_1 \dotplus W_2$, sabemos que T es un isomorfismo entre $W_1 \oplus W_2$ y V.

Si $(a, b) \in W_1 \oplus W_2$ y $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} T(\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2})(g)(a, b) &= T(\rho_{W_1}(g)(a), \rho_{W_2}(g)(b)) \\ &= \rho_{W_1}(g)(a) + \rho_{W_2}(g)(b) \\ &= \rho(g)(a) + \rho(g)(b) \end{aligned}$$

Demostración

Como $V = W_1 \dot{+} W_2$, sabemos que T es un isomorfismo entre $W_1 \oplus W_2$ y V.

Si $(a, b) \in W_1 \oplus W_2$ y $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} T(\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2})(g)(a, b) &= T(\rho_{W_1}(g)(a), \rho_{W_2}(g)(b)) \\ &= \rho_{W_1}(g)(a) + \rho_{W_2}(g)(b) \\ &= \rho(g)(a) + \rho(g)(b) \\ &= \rho(g)(a + b) \end{aligned}$$

Demostración

Como $V = W_1 \dotplus W_2$, sabemos que T es un isomorfismo entre $W_1 \oplus W_2$ y V.

Si $(a, b) \in W_1 \oplus W_2$ y $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} T(\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2})(g)(a, b) &= T(\rho_{W_1}(g)(a), \rho_{W_2}(g)(b)) \\ &= \rho_{W_1}(g)(a) + \rho_{W_2}(g)(b) \\ &= \rho(g)(a) + \rho(g)(b) \\ &= \rho(g)(a + b) \\ &= \rho(g)\, T(a, b). \end{aligned}$$

Demostración

Como $V = W_1 \dotplus W_2$, sabemos que T es un isomorfismo entre $W_1 \oplus W_2$ y V.

Si $(a, b) \in W_1 \oplus W_2$ y $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} T(\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2})(g)(a, b) &= T(\rho_{W_1}(g)(a), \rho_{W_2}(g)(b)) \\ &= \rho_{W_1}(g)(a) + \rho_{W_2}(g)(b) \\ &= \rho(g)(a) + \rho(g)(b) \\ &= \rho(g)(a + b) \\ &= \rho(g)\,T(a, b). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es un isomorfismo entre las representaciones $\rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2}$ y ρ.

Plan

1. Repaso: la suma directa de espacios vectoriales y la suma directa de subespacios
2. Sumas directas de representaciones
3. Ejemplos

Una clase de ejemplos: representaciones de grupos finitos cíclicos

Proposición

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^m = I_n$.

Entonces, la matriz A es invertible y diagonalizable.

Definimos $\rho\colon \mathbb{Z}_m \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$,

$$\rho(k + m\mathbb{Z}) \coloneqq A^k.$$

Entonces, la definición es consistente. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ es una base ordenada de $\mathbb{C}^n$ y

$$Au_j = \lambda_j u_j, \qquad (j \in \{1, \ldots, n\}),$$

entonces $W_j \coloneqq \mathrm{lin}(u_j)$ son subespacios ρ-invariantes.

Demostración: la matriz A es invertible y diagonalizable

Consideremos el polinomio $f(z) := z^m - 1$.

f es un polinomio anulador de A:

$$f(A) = A^m - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Las raíces del polinomio f son simples:

$$f(z) = \prod_{k=0}^{m-1} (z - \varepsilon_m^k), \qquad \varepsilon_m := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{m}.$$

Por lo tanto, A es diagonalizable.

Demostración: A es invertible

A es invertible porque

$$A(A^{m-1}) = (A^{m-1})A = A^m = I_n.$$

Otra demostración. Recordamos que $f(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ y

$$f(z) = \prod_{k=0}^{m-1} (z - \varepsilon_m^k).$$

Por el teorema del mapeo del espectro, $f[\mathrm{sp}(A)] = \mathrm{sp}(f(A)) = \{0\}$, así que

$$\mathrm{sp}(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\colon\ f(z) = 0\} = \left\{\varepsilon_m^k\colon\ k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}\right\}.$$

En particular, $0 \notin \mathrm{sp}(A)$, y A es invertible.

Demostración: la definición de ρ es consistente

Consideremos $\sigma\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$,

$$\sigma(k) \coloneqq A^k.$$

Por las propiedades de las potencias, σ es un homomorfismo.

Como $A^m = I_n$,

$$m\mathbb{Z} \subseteq \ker(\sigma).$$

Por el teorema fundamental de homomorfismos, existe un único $\rho\colon \mathbb{Z}_m \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que

$$\rho(k + m\mathbb{Z}) = \sigma(k) = A^k \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Demostración: los subespacios $W_j := \mathrm{lin}(u_j)$ son ρ-invariantes

Como $Au_j = \lambda_j u_j$, para cada k en $\mathbb{Z}$ tenemos que

$$\rho(k)u_j = A^k u_j = \lambda_j^k u_j \in \mathrm{lin}(u_j) = W_j.$$

Por lo tanto,

$$\rho(k)[W_j] \subseteq W_j.$$

Demostración: descomposición de la representación ρ

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos

$$\rho_j(k + m\mathbb{Z}) \coloneqq \rho(k + m\mathbb{Z}) \restriction_{W_j}^{W_j} .$$

Como $(u_1, \ldots, u_m)$ es una base ordenada de $\mathbb{C}^n$, tenemos que $\mathbb{C}^n = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n$ y

$$\rho \cong \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n.$$

Las representaciones ρ_j son de orden 1. Los cálculos de la página anterior implican que

$$\rho_j(k + m\mathbb{Z})v = \lambda_j^k v \qquad (v \in W_j).$$

Ejemplo 1

$G = \mathbb{Z}_6$, $V = \mathbb{C}^2$,

$$\rho(k + 6\mathbb{Z}) := \begin{bmatrix} \varepsilon_3^k & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^k \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_m := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{m}.$$

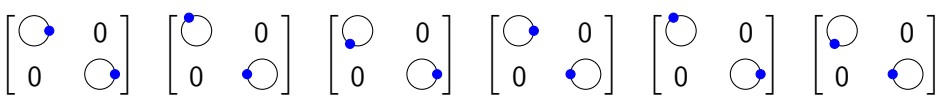
La definición es consistente, porque

$$(\varepsilon_3)^6 = (\varepsilon_2)^6 = 1.$$

Ejemplo 1

$$\rho(k+6\mathbb{Z}) := \begin{bmatrix} \varepsilon_3^k & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^k \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_m := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{m}.$$

$k = 0$ $k = 1$ $k = 2$ $k = 3$ $k = 4$ $k = 5$



Ejemplo 1

$$\rho(k+6\mathbb{Z}) := \begin{bmatrix} \varepsilon_3^k & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^k \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_m := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{m}.$$

Los subespacios $W_1 := \mathrm{lin}(e_1)$ y $W_2 := \mathrm{lin}(e_2)$ son ρ-invariantes.

La representaciones restringidas tienen la siguiente forma matricial (matrices 1×1):

$$\rho_1(k+6\mathbb{Z}) = [\varepsilon_3^k], \qquad \rho_2(k+6\mathbb{Z}) = [\varepsilon_2^k].$$

Tenemos que

$$\rho \cong \rho_1 \oplus \rho_2.$$

Ejemplo 2

$G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) \coloneqq A^k, \qquad A \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hemos calculado los valores y vectores propios de A,
cuyo polinomio característico es $\lambda^2 + \lambda + 1$:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Los subespacios $W_1 \coloneqq \mathrm{lin}(u_1)$ y $W_2 \coloneqq \mathrm{lin}(u_2)$ son ρ-invariantes.

Ejemplo 2

Sea V la matriz formada por las columnas v_1 y v_2. Notamos que V diagonaliza A:

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \qquad V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Definimos $\tau\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$,

$$\tau(g) := V^{-1}\rho(g)V.$$

Entonces,

$$\tau(k+3\mathbb{Z}) = V^{-1}\rho(k+3\mathbb{Z})V = V^{-1}A^kV = (V^{-1}AV)^k = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \end{bmatrix}.$$

Se ve que $\rho \cong \tau$ y τ se descompone en representaciones de orden 1.