

Descomposición de representaciones de grupos finitos (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

<https://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

15 de febrero de 2026

Objetivos de este tema

En este tema, estamos trabajando con grupos finitos y sus representaciones lineales sobre espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Nuestros objetivos:

- introducir el concepto de subespacio invariante;
- introducir el concepto de subrepresentación;
- demostrar que cada subespacio invariante tiene un complemento invariante;
- demostrar que cada representación se descompone en una suma directa de representaciones irreducibles.

Prerrequisitos para este tema

- representación lineal de grupo finito;
- suma directa de espacios vectoriales.

- 1 Repaso de definiciones básicas
- 2 Subespacios invariantes y subrepresentaciones
- 3 Un complemento invariante de un subespacio invariante (teorema de Maschke)
- 4 Descomposición en subrepresentaciones irreducibles

Bibliografía: publicaciones de Heinrich Maschke sobre este tema



Heinrich Maschke (1898):

Über den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen.

Math. Ann. 50 (4): 492–498.

<https://doi.org/10.1007/BF01444297>



Heinrich Maschke (1899):

Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind.

Math. Ann. 52 (2–3): 363–368.

<https://doi.org/10.1007/BF01476165>

Bibliografía: algunos libros conocidos

-  Gordon Douglas James, Martin W. Liebeck (2001):
Representations and characters of groups, 2nd ed.
-  Jean-Pierre Serre (1977):
Linear representations of finite groups.
-  Peter Webb (2016):
A course in finite group representation theory.

- 1 Repaso de definiciones básicas
- 2 Subespacios invariantes y subrepresentaciones
- 3 Un complemento invariante de un subespacio invariante (teorema de Maschke)
- 4 Descomposición en subrepresentaciones irreducibles

Representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos
y solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dado un espacio vectorial V , denotamos por $GL(V)$ al grupo de sus automorfismos (isomorfismos $V \rightarrow V$).

Una **representación lineal** de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho: G \rightarrow GL(V)$.

Vamos a trabajar solamente con representaciones lineales,
por eso decimos simplemente **representación**.

Si $\dim(V) = n$, se dice que n es el grado de la representación ρ .

La suma directa de dos representaciones

Sean G un grupo, V_1 y V_2 espacios vectoriales,
 $\rho_1: G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ y $\rho_2: G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ representaciones.

Denotamos por $V_1 \oplus V_2$ la suma directa de V_1 y V_2 .

La suma directa de representaciones ρ_1 y ρ_2 es

$$\rho_1 \oplus \rho_2: G \rightarrow V_1 \oplus V_2,$$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(x, y) := (\rho_1(x), \rho_2(y)).$$

Ejercicio: verificar que $\rho_1 \oplus \rho_2$ es una representación.

Morfismo entre representaciones

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G .

Un morfismo entre ρ y σ es una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ tal que

$$\forall g \in G \quad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$

A commutative diagram illustrating the relationship between two representations ρ and σ via a linear transformation T . The diagram consists of two horizontal rows of vector spaces. The top row has V on the left and W on the right, connected by a horizontal arrow labeled T . The bottom row also has V on the left and W on the right, connected by a horizontal arrow labeled T . A vertical arrow labeled $\rho(g)$ points from the V in the top row down to the V in the bottom row. Another vertical arrow labeled $\sigma(g)$ points from the W in the top row down to the W in the bottom row.

Isomorfismo entre representaciones

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G .

Un **isomorfismo** entre ρ y σ es un isomorfismo de espacios vectoriales $T: V \rightarrow W$ tal que

$$\forall g \in G \quad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$

A commutative diagram illustrating the relationship between two representations ρ and σ via an isomorphism T . The diagram consists of four nodes arranged in a square: V at the top-left, W at the top-right, V at the bottom-left, and W at the bottom-right. Horizontal arrows connect V to W at both the top and bottom, both labeled T . Vertical arrows connect V to V and W to W , labeled $\rho(g)$ and $\sigma(g)$ respectively.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \sigma(g) \\ V & \xrightarrow{T} & W \end{array}$$

El centralizador (conmutante) de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación del grupo G .

$\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ es el álgebra de todos los operadores lineales $V \rightarrow V$.

El **centralizador** de ρ se define como el conjunto de todos los morfismos entre ρ y ρ :

$$\mathcal{C}(\rho) := \left\{ T \in \mathcal{L}(V) : \forall g \in G \quad T\rho(g) = \rho(g)T \right\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{C}(\rho)$ es una subálgebra de $\mathcal{L}(V)$. Más aún, $I \in \mathcal{C}(\rho)$.

A commutative diagram with four vertices labeled V . The top-left and top-right vertices are connected by a horizontal arrow labeled T . The bottom-left and bottom-right vertices are also connected by a horizontal arrow labeled T . The top-left and bottom-left vertices are connected by a vertical arrow labeled $\rho(g)$ pointing downwards. Similarly, the top-right and bottom-right vertices are connected by a vertical arrow labeled $\rho(g)$ pointing downwards.

- 1 Repaso de definiciones básicas
- 2 Subespacios invariantes y subrepresentaciones
- 3 Un complemento invariante de un subespacio invariante (teorema de Maschke)
- 4 Descomposición en subrepresentaciones irreducibles

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V .

Se dice que W es un subespacio **invariante** o **estable** respecto ρ , si

$$\forall g \in G \quad \forall w \in W \quad \rho(g)w \in W.$$

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V .

Se dice que W es un subespacio **invariante** o **estable** respecto ρ , si

$$\forall g \in G \quad \forall w \in W \quad \rho(g)w \in W.$$

También se dice que W es un ρ -subespacio de V (o G -subespacio de V).

Una receta para ejemplos:
el núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Una receta para ejemplos:
el núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v)$$

Una receta para ejemplos:
el núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) =$$

Una receta para ejemplos:
el núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = \sigma(g)Tv$$

Una receta para ejemplos:
el núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = \sigma(g)Tv =$$

Una receta para ejemplos:
el núcleo de un morfismo es un subespacio invariante

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G y sea $T: V \rightarrow W$ un morfismo entre ρ y σ .

Entonces, $\ker(T)$ es ρ -invariante.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = \sigma(g)Tv = \sigma(g)0_W = 0_W,$$

así que $\rho(g)v \in \ker(T)$.

Subrepresentación

Suponemos que $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ es una representación y W es un subespacio de V invariante respecto a W .

Subrepresentación

Suponemos que $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ es una representación y W es un subespacio de V invariante respecto a W .

Para cada g en G , definimos $\rho^W(g): W \rightarrow W$,

$$\rho^W(g)v := \rho(g)v.$$

En otras palabras, $\rho^W(g) = \rho(g)|_W^W$. Estamos restringiendo el dominio y el codominio.

Es fácil ver que

$$\rho^W(g)\rho^W(h) = \rho^W(gh)$$

y que $\rho^W(g) \in \mathrm{GL}(W)$.

Subrepresentación

Suponemos que $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ es una representación y W es un subespacio de V invariante respecto a W .

Para cada g en G , definimos $\rho^W(g): W \rightarrow W$,

$$\rho^W(g)v := \rho(g)v.$$

En otras palabras, $\rho^W(g) = \rho(g)|_W^W$. Estamos restringiendo el dominio y el codominio.

Es fácil ver que

$$\rho^W(g)\rho^W(h) = \rho^W(gh)$$

y que $\rho^W(g) \in \mathrm{GL}(W)$.

Concluimos que $\rho^W: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ es una representación.

Subrepresentación

Suponemos que $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación y W es un subespacio de V invariante respecto a W .

Definimos $\rho^W: G \rightarrow \text{GL}(W)$,

$$\rho^W(g)v := \rho(g)v.$$

Se dice que ρ^W es una subrepresentación de ρ .

Ejemplo

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

Consideramos la representación regular:

$$\rho(g)b_t := b_{gt}.$$

Ejemplo

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

Consideramos la representación regular:

$$\rho(g)b_t := b_{gt}.$$

Pongamos

$$u := \sum_{t \in G} b_t, \quad W := \mathbb{C}u.$$

Es fácil ver que $\rho(g)u = u$ para cada g en G .

Ejemplo

Sean G un grupo de orden n , V un espacio vectorial de dimensión n , $(b_t)_{t \in G}$ una base de V .

Consideramos la representación regular:

$$\rho(g)b_t := b_{gt}.$$

Pongamos

$$u := \sum_{t \in G} b_t, \quad W := \mathbb{C}u.$$

Es fácil ver que $\rho(g)u = u$ para cada g en G .

Por lo tanto, W es un subespacio invariante. En este ejemplo, ρ^W es la representación trivial.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ se llama irreducible si no existe ρ -subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ se llama irreducible si no existe ρ -subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}$ es una representación y S es un ρ -subespacio de V tal que $S \neq \{0_V\}$, se dice que S es irreducible si ρ^S es irreducible.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ se llama irreducible si no existe ρ -subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}$ es una representación y S es un ρ -subespacio de V tal que $S \neq \{0_V\}$, se dice que S es irreducible si ρ^S es irreducible.

En otras palabras,

S es irreducible si no existe ρ -subespacio W de S tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq S$.

Idea de descomposición de una representación en una suma directa

Supongamos que $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación
y W_1, W_2 son dos subespacios ρ -invariantes tales que

$$V = W_1 + W_2,$$

es decir,

$$V = W_1 + W_2, \quad W_1 \cap W_2 = \{0_V\}.$$

En este caso, V se identifica con la suma directa $W_1 \oplus W_2$,
y ρ se identifica con la suma directa $\rho^{W_1} \oplus \rho^{W_2}$.

Ejercicio: verificar estas afirmaciones.

- 1 Repaso de definiciones básicas
- 2 Subespacios invariantes y subrepresentaciones
- 3 Un complemento invariante de un subespacio invariante (teorema de Maschke)
- 4 Descomposición en subrepresentaciones irreducibles

Teorema de Maschke sobre la existencia de un subespacio complementario

Teorema

Sea G un grupo finito, V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación y W un ρ -subespacio de V .

Entonces, existe un ρ -subespacio U de V tal que

$$V = W \dot{+} U.$$

Demostración, paso 1: un complemento S del subespacio W

Sea S algún subespacio vectorial de V tal que $V = W \dot{+} S$.

Demostración, paso 1: un complemento S del subespacio W

Sea S algún subespacio vectorial de V tal que $V = W \dot{+} S$.

Recordemos que S se puede construir usando bases.

Demostración, paso 1: un complemento S del subespacio W

Sea S algún subespacio vectorial de V tal que $V = W \dot{+} S$.

Recordemos que S se puede construir usando bases.

Sea $b_1, \dots, b_m$ una base del subespacio W .

Demostración, paso 1: un complemento S del subespacio W

Sea S algún subespacio vectorial de V tal que $V = W \dot{+} S$.

Recordemos que S se puede construir usando bases.

Sea $b_1, \dots, b_m$ una base del subespacio W .

Sean $b_{m+1}, \dots, b_n \in V$ tales que $b_1, \dots, b_n$ es una base de V .

La existencia de estos $b_{m+1}, \dots, b_n$ es un teorema conocido de álgebra lineal.

Demostración, paso 1: un complemento S del subespacio W

Sea S algún subespacio vectorial de V tal que $V = W \dot{+} S$.

Recordemos que S se puede construir usando bases.

Sea $b_1, \dots, b_m$ una base del subespacio W .

Sean $b_{m+1}, \dots, b_n \in V$ tales que $b_1, \dots, b_n$ es una base de V .

La existencia de estos $b_{m+1}, \dots, b_n$ es un teorema conocido de álgebra lineal.

En este contexto, podemos construir S como

$$S := \text{lin}(b_{m+1}, \dots, b_n).$$

Demostración, paso 2: proyección de V sobre W a lo largo de S

Como $V = W \dot{+} S$,

$$\forall v \in V \quad \exists! w \in W \quad v - w \in S.$$

Demostración, paso 2: proyección de V sobre W a lo largo de S

Como $V = W \dot{+} S$,

$$\forall v \in V \quad \exists! w \in W \quad v - w \in S.$$

Por lo tanto, la siguiente definición es consistente.

Demostración, paso 2: proyección de V sobre W a lo largo de S

Como $V = W \dot{+} S$,

$$\forall v \in V \quad \exists! w \in W \quad v - w \in S.$$

Por lo tanto, la siguiente definición es consistente.

Definimos $Q: V \rightarrow V$,

$$\forall v \in V \quad Qv \in W \quad \wedge \quad v - Qv \in S.$$

Demostración, paso 2: proyección de V sobre W a lo largo de S

Como $V = W \dot{+} S$,

$$\forall v \in V \quad \exists! w \in W \quad v - w \in S.$$

Por lo tanto, la siguiente definición es consistente.

Definimos $Q: V \rightarrow V$,

$$\forall v \in V \quad Qv \in W \quad \wedge \quad v - Qv \in S.$$

En el siguiente paso, vamos a modificar Q .

Demostración, paso 3: definición de P

Definimos $P: V \rightarrow V$,

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Demostración, paso 3: definición de P

Definimos $P: V \rightarrow V$,

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Obviamente, P es un operador lineal.

Demostración, paso 4: $\text{im}(P) \subseteq W$

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Mostremos que $\text{im}(P) \subseteq W$.

Demostración, paso 4: $\text{im}(P) \subseteq W$

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Mostremos que $\text{im}(P) \subseteq W$.

Sea $v \in V$. Para cada g en G , tenemos que $Q \rho(g) v \in W$.

Como W es ρ -invariante, para cada g en G ,

$$\rho(g^{-1}) Q \rho(g) v \in W.$$

Finalmente, como W es un subespacio, $Pv \in W$.

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})Q\rho(g)v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})Q\rho(g)v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v =$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x)v$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})Q\rho(g)v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})Q\rho(g)\rho(x)v =$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})Q\rho(g)v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})Q\rho(g)\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})Q\rho(gx)v$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)v$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto xg$ es biyectiva).

$$P\rho(x)v$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)v$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto xg$ es biyectiva).

$$P\rho(x)v =$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)v$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto xg$ es biyectiva).

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h)v$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)v$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto xg$ es biyectiva).

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h)v =$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)v$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto xg$ es biyectiva).

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h)v = \rho(x) \left(\frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(h^{-1}) Q \rho(h) \right) v$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)v$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto xg$ es biyectiva).

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h)v = \rho(x) \left(\frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(h^{-1}) Q \rho(h) \right) v =$$

Demostración, paso 5: P es un morfismo de representaciones

$$Pv := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)v$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto xg$ es biyectiva).

$$P\rho(x)v = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h)v = \rho(x) \left(\frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(h^{-1}) Q \rho(h) \right) v = \rho(x) Pv.$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P$ y $P[W] \subseteq W$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W .

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W}$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P$ y $P[W] \subseteq W$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W .

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} =$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P$ y $P[W] \subseteq W$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W .

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \rho(g) w$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P$ y $P[W] \subseteq W$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W .

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \rho(g)w =$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P$ y $P[W] \subseteq W$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W .

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \rho(g)w = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} w$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P$ y $P[W] \subseteq W$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W .

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \rho(g)w = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} w =$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P$ y $P[W] \subseteq W$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W .

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \rho(g)w = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} w = w.$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P$ y $P[W] \subseteq W$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W .

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \rho(g)w = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} w = w.$$

Una consecuencia: $P[W] = W$.

Demostración, paso 6: $P^2 = P$ y $P[W] \subseteq W$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W .

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \rho(g) w = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} w = w.$$

Una consecuencia: $P[W] = W$.

Otra consecuencia: $P^2 = P$.

En efecto, si $v \in V$, entonces

$$P^2 v = P \left(\underbrace{Pv}_{\in W} \right) = Pv.$$

Demostración, paso 7 (final): $U := \ker(P)$

Hemos mostrado que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y P conmuta con ρ .

Pongamos $U := \ker(P)$.

Demostración, paso 7 (final): $U := \ker(P)$

Hemos mostrado que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y P conmuta con ρ .

Pongamos $U := \ker(P)$.

Por las propiedades generales de operadores idempotentes,

$$V = \text{im}(P) \dot{+} \ker(P) = W \dot{+} U.$$

Demostración, paso 7 (final): $U := \ker(P)$

Hemos mostrado que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y P conmuta con ρ .

Pongamos $U := \ker(P)$.

Por las propiedades generales de operadores idempotentes,

$$V = \text{im}(P) \dot{+} \ker(P) = W \dot{+} U.$$

Como P pertenece al centralizador de ρ (en otras palabras, P es un morfismo), su núcleo U es ρ -invariante.

- 1 Repaso de definiciones básicas
- 2 Subespacios invariantes y subrepresentaciones
- 3 Un complemento invariante de un subespacio invariante (teorema de Maschke)
- 4 Descomposición en subrepresentaciones irreducibles

Representaciones completamente reducibles

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación y $V \neq \{0_V\}$.

Se dice que ρ es completamente reducible si existen ρ -subespacios $W_1, \dots, W_r$ de V tales que

$$V = W_1 \dot{+} \dots \dot{+} W_r$$

y $W_1, \dots, W_r$ son ρ -irreducibles.

Descomposición en subespacios irreducibles

Algunos autores usan el término “teorema de Maschke” para el siguiente resultado.

Teorema

Si G un grupo finito, V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$, entonces ρ es completamente reducible.

Demostración: reformulamos el teorema en forma inductiva

Suponemos que G es un grupo finito fijo.

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

para cada V de dimensión n ,

para cada representación $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$,

ρ es completamente reducible.

Demostremos que $\mathcal{A}(n)$ se cumple para cada n en $\mathbb{N}$.

Usamos la inducción matemática.

Demostración: base de inducción

Sea $n = 1$.

Suponemos que $\dim(V) = 1$ y $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ es una representación.

Por las propiedades de dimensiones,

si W es un subespacio de V , entonces $W = \{0_V\}$ o $W = V$.

Por lo tanto, V no tiene subespacio W tal que $W = \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Hemos demostrado $\mathcal{A}(1)$.

Demostración: paso de inducción, inicio

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Demostremos $\mathcal{A}(n)$ suponiendo que $\mathcal{A}(m)$ se cumple para cada $m < n$.

Demostración: paso de inducción, inicio

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Demostremos $\mathcal{A}(n)$ suponiendo que $\mathcal{A}(m)$ se cumple para cada $m < n$.

Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$ y sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Demostración: paso de inducción, inicio

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Demostremos $\mathcal{A}(n)$ suponiendo que $\mathcal{A}(m)$ se cumple para cada $m < n$.

Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$ y sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Si ρ es irreducible, entonces ponemos $r := 1$, $W_1 := V$ y obtenemos el resultado.

Demostración: paso de inducción, inicio

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Demostremos $\mathcal{A}(n)$ suponiendo que $\mathcal{A}(m)$ se cumple para cada $m < n$.

Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$ y sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Si ρ es irreducible, entonces ponemos $r := 1$, $W_1 := V$ y obtenemos el resultado.

Supongamos que existe un ρ -subespacio W de V tal que $S \neq \{0_V\}$ y $S \neq V$.

Demostración: paso de inducción, inicio

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Demostremos $\mathcal{A}(n)$ suponiendo que $\mathcal{A}(m)$ se cumple para cada $m < n$.

Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$ y sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Si ρ es irreducible, entonces ponemos $r := 1$, $W_1 := V$ y obtenemos el resultado.

Supongamos que existe un ρ -subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Usando el teorema de Maschke encontramos un ρ -subespacio U de V tal que

$$V = W \dot{+} U.$$

Demostración: paso de inducción, final

Como $0 < \dim(W) < n$ y $\dim(W) + \dim(U) = n$, obtenemos que $0 < \dim(U) < n$.

Demostración: paso de inducción, final

Como $0 < \dim(W) < n$ y $\dim(W) + \dim(U) = n$, obtenemos que $0 < \dim(U) < n$.

Aplicamos la hipótesis de inducción a los subespacios W y U .

De manera más formal, aplicamos $\mathcal{A}(\dim(W))$ con ρ^W y aplicamos $\mathcal{A}(\dim(U))$ con ρ^U .

Demostración: paso de inducción, final

Como $0 < \dim(W) < n$ y $\dim(W) + \dim(U) = n$, obtenemos que $0 < \dim(U) < n$.

Aplicamos la hipótesis de inducción a los subespacios W y U .

De manera más formal, aplicamos $\mathcal{A}(\dim(W))$ con ρ^W y aplicamos $\mathcal{A}(\dim(U))$ con ρ^U .

Obtenemos ρ -subespacios irreducibles $S_1, \dots, S_p$ de W

y ρ -subespacios irreducibles $S_{p+1}, \dots, S_r$ de U tales que

$$W = S_1 \dot{+} \dots \dot{+} S_p, \quad U = S_{p+1} \dot{+} \dots \dot{+} S_r.$$

Demostración: paso de inducción, final

Como $0 < \dim(W) < n$ y $\dim(W) + \dim(U) = n$, obtenemos que $0 < \dim(U) < n$.

Aplicamos la hipótesis de inducción a los subespacios W y U .

De manera más formal, aplicamos $\mathcal{A}(\dim(W))$ con ρ^W y aplicamos $\mathcal{A}(\dim(U))$ con ρ^U .

Obtenemos ρ -subespacios irreducibles $S_1, \dots, S_p$ de W

y ρ -subespacios irreducibles $S_{p+1}, \dots, S_r$ de U tales que

$$W = S_1 \dot{+} \dots \dot{+} S_p, \quad U = S_{p+1} \dot{+} \dots \dot{+} S_r.$$

Concluimos que

$$V = S_1 \dot{+} \dots \dot{+} S_r.$$