Construcción de un complemento invariante de un subespacio invariante (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

29 de octubre de 2026

Objetivos de este tema

En este tema, estamos trabajando con grupos finitos
y sus representaciones lineales sobre espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Nuestro objetivo:

- demostrar que cada subespacio invariante tiene un complemento invariante;

Prerrequisitos para este tema

- subespacio invariante de una representación;
- la suma directa de espacios vectoriales.

1. Repaso de definiciones y conceptos auxiliares
2. Descomposiciones en subespacios invariantes
3. Teorema: existencia de un complemento invariante para un subespacio invariante
4. Primera demostración: simetrizamos un operador de proyección
5. Segunda demostración: usamos un producto interno tal que la representación es unitaria
6. Ejemplo

Bibliografía: publicaciones de Heinrich Maschke sobre este tema



Heinrich Maschke (1898):

Über den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen.

Math. Ann. 50 (4): 492–498.

https://doi.org/10.1007/BF01444297



Heinrich Maschke (1899):

Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind.

Math. Ann. 52 (2–3): 363–368.

https://doi.org/10.1007/BF01476165

Bibliografía: algunos libros conocidos



Gordon Douglas James, Martin W. Liebeck (2001):

Representations and characters of groups, 2nd ed.



Jean-Pierre Serre (1977):

Linear representations of finite groups.



Peter Webb (2016):

A course in finite group representation theory.



Benjamin Steinberg (2012):

Representation theory of finite groups: an introductory approach.

1. Repaso de definiciones y conceptos auxiliares
2. Descomposiciones en subespacios invariantes
3. Teorema: existencia de un complemento invariante para un subespacio invariante
4. Primera demostración: simetrizamos un operador de proyección
5. Segunda demostración: usamos un producto interno tal que la representación es unitaria
6. Ejemplo

Repaso: subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V.

Se dice que W es un subespacio invariante o estable respecto ρ, si

$$\forall g \in G \qquad \forall w \in W \qquad \rho(g)w \in W.$$

Repaso: subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V.

Se dice que W es un subespacio invariante o estable respecto ρ, si

$$\forall g \in G \qquad \forall w \in W \qquad \rho(g)w \in W.$$

También se dice que W es un ρ-subespacio de V (o G-subespacio de V).

El centralizador (conmutante) de una representación

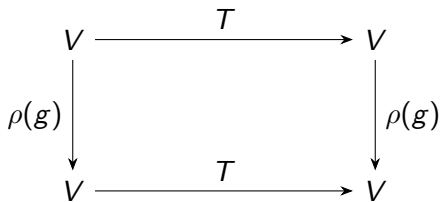
Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación del grupo G.

$\mathrm{L}(V) = \mathrm{L}(V, V)$ es el álgebra de todos los operadores lineales $V \to V$.

El centralizador de ρ se define como el conjunto de todos los morfismos entre ρ y ρ:

$$\mathcal{C}(\rho) \coloneqq \Big\{ T \in \mathrm{L}(V)\colon \quad \forall g \in G \qquad T\rho(g) = \rho(g)T \Big\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{C}(\rho)$ es una subálgebra de $\mathrm{L}(V)$. Más aún, $I \in \mathcal{C}(\rho)$.



Repaso: el núcleo y la imagen de un operador que conmuta con la representación

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación del grupo G y $T \in \mathcal{C}(\rho)$, entonces $\ker(T)$ e $\mathrm{im}(T)$ son ρ-invariantes.

Repaso: sumas directas de subespacios de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial y sean W_1, W_2 sus subespacios vectoriales de V.

Se dice que V es una suma directa de W_1 y W_2 y se escribe

$$V = W_1 \dot{+} W_2\,,$$

si $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

En esta situación,

$$\forall v \in V \qquad \exists!(a, b) \in W_1 \times W_2 \qquad v = a + b.$$

Repaso: existencia de un subespacio vectorial complementario

Proposición

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y W es un subespacio vectorial de V, entonces existe un subespacio vectorial U de V tal que

$$V = W \dotplus U.$$

Repaso: existencia de un subespacio vectorial complementario

Proposición

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y W es un subespacio vectorial de V, entonces existe un subespacio vectorial U de V tal que

$$V = W \dotplus U.$$

Idea de demostración.

Sea $(b_1, \ldots, b_m)$ una base ordenada de W.

Encontramos $b_{m+1}, \ldots, b_n$ en V tales que

$(b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n)$ es una base ordenada de V.

Pongamos $U \coloneqq \mathrm{lin}(b_{m+1}, \ldots, b_n)$.

Repaso: la imagen de un operador idempotente

Proposición

Si $Q \in \mathrm{L}(V)$ tal que $Q^2 = Q$, entonces

$$\mathrm{im}(Q) = \{v \in V : \ Qv = v\} = \ker(I - Q).$$

Repaso: la imagen de un operador idempotente

Proposición

Si $Q \in \mathrm{L}(V)$ tal que $Q^2 = Q$, entonces

$$\mathrm{im}(Q) = \{v \in V : \ Qv = v\} = \ker(I - Q).$$

Demostración: ejercicio.

Repaso: la imagen de un operador idempotente

Proposición

Si $Q \in \mathrm{L}(V)$ tal que $Q^2 = Q$, entonces

$$\mathrm{im}(Q) = \{v \in V : \ Qv = v\} = \ker(I - Q).$$

Demostración: ejercicio.

Corolario

Si $Q \in \mathrm{L}(V)$ tal que $Q^2 = Q$, entonces

$$\mathrm{im}(I - Q) = \ker(Q).$$

Repaso: sumas directas y proyecciones

Proposición

Si $V = W \dotplus U$, entonces existe un único $Q \in \mathrm{L}(V)$ tal que

$$Q^2 = Q, \qquad \mathrm{im}(Q) = W, \qquad \ker(Q) = U.$$

Idea de demostración, unicidad

Supongamos que $V = W \dotplus U$, $Q \in \mathrm{L}(V)$,

$$Q^2 = Q, \qquad \mathrm{im}(Q) = W, \qquad \ker(Q) = U.$$

Idea de demostración, unicidad

Supongamos que $V = W \dot{+} U$, $Q \in \mathrm{L}(V)$,

$$Q^2 = Q, \qquad \mathrm{im}(Q) = W, \qquad \ker(Q) = U.$$

Dado v en V, existe un único par (w, u) en $W \times U$ tal que $v = w + u$.

Idea de demostración, unicidad

Supongamos que $V = W \dotplus U$, $Q \in \mathrm{L}(V)$,

$$Q^2 = Q, \qquad \mathrm{im}(Q) = W, \qquad \ker(Q) = U.$$

Dado v en V, existe un único par (w, u) en $W \times U$ tal que $v = w + u$.

Por otro lado,

$$Qv \in \mathrm{im}(Q) = W, \qquad (I - Q)v \in \mathrm{im}(I - Q) = \ker(Q) = U, \qquad Qv + (I - Q)v = v.$$

Concluimos que $Qv = w$.

Idea de demostración, existencia

Supongamos que $V = W \dot{+} U$.

Idea de demostración, existencia

Supongamos que $V = W \dot{+} U$.

Dado v en V, existe un único par (w, u) en $W \times U$ tal que $v = w + u$.

Idea de demostración, existencia

Supongamos que $V = W \dot{+} U$.

Dado v en V, existe un único par (w, u) en $W \times U$ tal que $v = w + u$.

Pongamos $Qv := w$.

Idea de demostración, existencia

Supongamos que $V = W \dotplus U$.

Dado v en V, existe un único par (w, u) en $W \times U$ tal que $v = w + u$.

Pongamos $Qv := w$.

Esto significa que $Qv \in W$ y $(I - Q)v \in U$.

Idea de demostración, existencia

Supongamos que $V = W \dotplus U$.

Dado v en V, existe un único par (w, u) en $W \times U$ tal que $v = w + u$.

Pongamos $Qv := w$.

Esto significa que $Qv \in W$ y $(I - Q)v \in U$.

Es fácil ver que Q tiene las propiedades deseadas.

Repaso: proyecciones y sumas directas

Proposición

Si $Q \in \mathrm{L}(V)$ y $Q^2 = Q$, entonces

$$V = \mathrm{im}(Q) \dotplus \ker(Q).$$

Repaso: proyecciones y sumas directas

Proposición

Si $Q \in \mathrm{L}(V)$ y $Q^2 = Q$, entonces

$$V = \mathrm{im}(Q) \dotplus \ker(Q).$$

Demostración. Si $v \in V$, entonces

$$v = Qv + (I - Q)v \in \mathrm{im}(Q) + \mathrm{im}(I - Q) = \mathrm{im}(Q) + \ker(Q).$$

Si $w \in \mathrm{im}(Q) \cap \ker(Q)$, entonces

$$w = Qw = 0_V.$$

1 Repaso de definiciones y conceptos auxiliares

2 Descomposiciones en subespacios invariantes

3 Teorema: existencia de un complemento invariante para un subespacio invariante

4 Primera demostración: simetrizamos un operador de proyección

5 Segunda demostración: usamos un producto interno tal que la representación es unitaria

6 Ejemplo

Proyección sobre un subespacio ρ-invariante

Proposición

Sean V un espacio vectorial, W y U subespacios vectoriales de V tales que

$$V = W \dotplus U,$$

y sea $P \in \mathrm{L}(V)$ tal que

$$\mathrm{im}(P) = W, \qquad \ker(P) = U.$$

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) W y U son ρ-invariantes;

(b) $\rho \in \mathcal{C}(\rho)$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I - P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I - P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Luego, para cada g en G,

$$P\rho(g)v$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I - P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Luego, para cada g en G,

$$P\rho(g)v =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I - P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Luego, para cada g en G,

$$P\rho(g)v = P\rho(g)(u + w)$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I - P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Luego, para cada g en G,

$$P\rho(g)v = P\rho(g)(u + w) =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I-P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Luego, para cada g en G,

$$P\rho(g)v = P\rho(g)(u+w) = P(\underbrace{\rho(g)w}_{\in W}) + P(\underbrace{\rho(g)u}_{\in U})$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I-P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Luego, para cada g en G,

$$P\rho(g)v = P\rho(g)(u+w) = P(\underbrace{\rho(g)w}_{\in W}) + P(\underbrace{\rho(g)u}_{\in U}) =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I-P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Luego, para cada g en G,

$$P\rho(g)v = P\rho(g)(u+w) = P(\underbrace{\rho(g)w}_{\in W}) + P(\underbrace{\rho(g)u}_{\in U}) = \rho(g)w$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I-P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Luego, para cada g en G,

$$P\rho(g)v = P\rho(g)(u+w) = P(\underbrace{\rho(g)w}_{\in W}) + P(\underbrace{\rho(g)u}_{\in U}) = \rho(g)w =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que W y U son ρ-invariantes.

Dado v en V, pongamos $\quad w \coloneqq Pv, \quad u \in (I-P)v.$ Obtenemos que

$$v = w + u, \qquad w \in W, \qquad u \in U.$$

Luego, para cada g en G,

$$P\rho(g)v = P\rho(g)(u+w) = P(\underbrace{\rho(g)w}_{\in W}) + P(\underbrace{\rho(g)u}_{\in U}) = \rho(g)w = \rho(g)Pv.$$

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que $P \in \mathcal{C}(\rho)$.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que $P \in \mathcal{C}(\rho)$.

En este caso, sabemos que $\mathrm{im}(P)$ e $\mathrm{im}(P)$ son ρ-invariantes.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que $P \in \mathcal{C}(\rho)$.

En este caso, sabemos que $\mathrm{im}(P)$ e $\mathrm{im}(P)$ son ρ-invariantes.

Concluimos que W y U son ρ-invariantes.

1. Repaso de definiciones y conceptos auxiliares
2. Descomposiciones en subespacios invariantes
3. Teorema: existencia de un complemento invariante para un subespacio invariante
4. Primera demostración: simetrizamos un operador de proyección
5. Segunda demostración: usamos un producto interno tal que la representación es unitaria
6. Ejemplo

Teorema sobre la existencia de un subespacio complementario invariante para un subespacio invariante

Teorema

Sea G un grupo finito, V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y W un ρ-subespacio de V.

Entonces, existe un ρ-subespacio U de V tal que

$$V = W \dotplus U.$$

Teorema sobre la existencia de un subespacio complementario invariante para un subespacio invariante

Teorema

Sea G un grupo finito, V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y W un ρ-subespacio de V.

Entonces, existe un ρ-subespacio U de V tal que

$$V = W \dotplus U.$$

Otra forma del teorema:
existe $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ e $\mathrm{im}(P) = W$.

Vamos a estudiar dos demostraciones del teorema:

- considerar un operador de proyección sobre W y simetrizarlo;
- usar un producto interno tal que ρ es unitaria.

1. Repaso de definiciones y conceptos auxiliares
2. Descomposiciones en subespacios invariantes
3. Teorema: existencia de un complemento invariante para un subespacio invariante
4. Primera demostración: simetrizamos un operador de proyección
5. Segunda demostración: usamos un producto interno tal que la representación es unitaria
6. Ejemplo

Demostración, paso 1: una proyección Q tal que $\text{im}(Q) = W$

Sea S algún subespacio vectorial de V tal que $V = W \dotplus S$.

Demostración, paso 1: una proyección Q tal que $\mathrm{im}(Q) = W$

Sea S algún subespacio vectorial de V tal que $V = W \dotplus S$.

Sea $Q \in \mathrm{L}(V)$ tal que

$$Q^2 = Q, \qquad \mathrm{im}(Q) = W, \qquad \ker(Q) = S.$$

Demostración, paso 1: una proyección Q tal que $\mathrm{im}(Q) = W$

Sea S algún subespacio vectorial de V tal que $V = W \dotplus S$.

Sea $Q \in \mathrm{L}(V)$ tal que

$$Q^2 = Q, \qquad \mathrm{im}(Q) = W, \qquad \ker(Q) = S.$$

En el siguiente paso, vamos a modificar Q.

Demostración, paso 2: definición de P

Definimos $P\colon V \to V$,

$$P \coloneqq \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Demostración, paso 2: definición de P

Definimos $P\colon V \to V$,

$$P \coloneqq \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Obviamente, P es un operador lineal.

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x)$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) =$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x)$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x) =$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto gx$ es biyectiva).

$$P\rho(x)$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto gx$ es biyectiva).

$$P\rho(x) =$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto gx$ es biyectiva).

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h)$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto gx$ es biyectiva).

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h) =$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g)\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto gx$ es biyectiva).

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h) = \rho(x) \left(\frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(h^{-1}) Q \rho(h) \right)$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto gx$ es biyectiva).

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h) = \rho(x) \left(\frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(h^{-1}) Q \rho(h) \right) =$$

Demostración, paso 3: P es un morfismo de representaciones

$$P := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g).$$

Si $x \in G$, entonces

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) \rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(gx)$$

Hacemos el cambio de variable $h = gx$, $g = hx^{-1}$ (la función $g \mapsto gx$ es biyectiva).

$$P\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(xh^{-1}) Q \rho(h) = \rho(x) \left(\frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho(h^{-1}) Q \rho(h) \right) = \rho(x) P.$$

Demostración, paso 4: $\mathrm{im}(P) \subseteq W$

$$Pv \coloneqq \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Mostremos que $\mathrm{im}(P) \subseteq W$.

Demostración, paso 4: $\mathrm{im}(P) \subseteq W$

$$Pv \coloneqq \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \rho(g) v.$$

Mostremos que $\mathrm{im}(P) \subseteq W$.

Sea $v \in V$. Para cada g en G, tenemos que $Q\rho(g)v \in W$.

Como W es ρ-invariante, para cada g en G,

$$\rho(g^{-1}) Q \rho(g) v \in W.$$

Finalmente, como W es un subespacio, $Pv \in W$.

Demostración, paso 5: $\forall w \in W \quad Pw = w$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W.

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g) w}_{\in W}$$

Demostración, paso 5: $\forall w \in W \quad Pw = w$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W.

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g) w}_{\in W} =$$

Demostración, paso 5: $\forall w \in W \quad Pw = w$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W.

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})\rho(g)w$$

Demostración, paso 5: $\forall w \in W \quad Pw = w$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W.

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})\rho(g)w =$$

Demostración, paso 5: $\forall w \in W \quad Pw = w$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W.

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})\rho(g)w = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} w$$

Demostración, paso 5: $\forall w \in W \quad Pw = w$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W.

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})\rho(g)w = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} w =$$

Demostración, paso 5: $\forall w \in W \quad Pw = w$

Mostremos que $Pw = w$ para cada w en W.

$$Pw = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) Q \underbrace{\rho(g)w}_{\in W} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})\rho(g)w = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} w = w.$$

Esto implica que $P[W] = W$.

Demostración, paso 6: $P^2 = P, \quad \mathrm{im}(P) = W$

Hemos mostrado que

$$\forall w \in W \qquad Pw = w.$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P, \quad \mathrm{im}(P) = W$

Hemos mostrado que

$$\forall w \in W \qquad Pw = w.$$

Esto implica que $P^2 = P$.

Demostración, paso 6: $P^2 = P, \quad \mathrm{im}(P) = W$

Hemos mostrado que

$$\forall w \in W \qquad Pw = w.$$

Esto implica que $P^2 = P$.

En efecto, si $v \in V$, entonces

$$P^2 v = P\Big(\underbrace{Pv}_{\in W}\Big) = Pv.$$

Demostración, paso 6: $P^2 = P, \quad \mathrm{im}(P) = W$

Hemos mostrado que

$$\forall w \in W \qquad Pw = w.$$

Esto implica que $P^2 = P$.

En efecto, si $v \in V$, entonces

$$P^2 v = P\Big(\underbrace{Pv}_{\in W}\Big) = Pv.$$

Más aún, como $\mathrm{im}(P) \subseteq W$ y

$$W = P[W] \subseteq \mathrm{im}(P),$$

tenemos que $\mathrm{im}(P) = W$.

Demostración, paso 7 (final): $U \coloneqq \ker(P)$

Hemos mostrado que $P^2 = P$, $\mathrm{im}(P) = W$ y P conmuta con ρ.

Pongamos $U \coloneqq \ker(P)$.

Demostración, paso 7 (final): $U \coloneqq \ker(P)$

Hemos mostrado que $P^2 = P$, $\mathrm{im}(P) = W$ y P conmuta con ρ.

Pongamos $U \coloneqq \ker(P)$.

Por las propiedades generales de operadores idemponentes,

$$V = \mathrm{im}(P) \dot{+} \ker(P) = W \dot{+} U.$$

Demostración, paso 7 (final): $U \coloneqq \ker(P)$

Hemos mostrado que $P^2 = P$, $\mathrm{im}(P) = W$ y P conmuta con ρ.

Pongamos $U \coloneqq \ker(P)$.

Por las propiedades generales de operadores idemponentes,

$$V = \mathrm{im}(P) \dotplus \ker(P) = W \dotplus U.$$

Como $P \in \mathcal{C}(\rho)$, $\ker(P)$ es ρ-invariante.

1. Repaso de definiciones y conceptos auxiliares
2. Descomposiciones en subespacios invariantes
3. Teorema: existencia de un complemento invariante para un subespacio invariante
4. Primera demostración: simetrizamos un operador de proyección
5. Segunda demostración: usamos un producto interno tal que la representación es unitaria
6. Ejemplo

Segunda demostración, paso 1

Encontramos un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V tal que
ρ es unitaria respecto a este producto interno:

$$\forall x \in G \qquad \forall a, b \in V \qquad \langle \rho(x)a, \rho(x)b \rangle = \langle a, b \rangle.$$

Segunda demostración, paso 1

Encontramos un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V tal que
ρ es unitaria respecto a este producto interno:

$$\forall x \in G \qquad \forall a, b \in V \qquad \langle \rho(x)a, \rho(x)b \rangle = \langle a, b \rangle.$$

Definimos U como el complemento ortogonal de W:

$$U \coloneqq W^{\perp}, \qquad \text{esto es,} \qquad U = \{v \in V : \quad \forall w \in W \quad \langle v, w \rangle = 0\}.$$

Segunda demostración, paso 2

Como $U = W^{\perp}$, tenemos que

$$V = W \oplus U.$$

En particular, esto implica que

$$V = W \dot{+} U.$$

Segunda demostración, paso 3

Mostremos que U es ρ-invariante.

Segunda demostración, paso 3

Mostremos que U es ρ-invariante.

Sea $u \in U$ y sea $x \in G$. Mostremos que $\rho(x)u \in U$, es decir, $\rho(x)u \in W^{\perp}$.

Segunda demostración, paso 3

Mostremos que U es ρ-invariante.

Sea $u \in U$ y sea $x \in G$. Mostremos que $\rho(x)u \in U$, es decir, $\rho(x)u \in W^{\perp}$.

Dado w en W,

$$\langle \rho(x)u, w \rangle$$

Segunda demostración, paso 3

Mostremos que U es ρ-invariante.

Sea $u \in U$ y sea $x \in G$. Mostremos que $\rho(x)u \in U$, es decir, $\rho(x)u \in W^{\perp}$.

Dado w en W,

$$\langle \rho(x)u, w \rangle =$$

Segunda demostración, paso 3

Mostremos que U es ρ-invariante.

Sea $u \in U$ y sea $x \in G$. Mostremos que $\rho(x)u \in U$, es decir, $\rho(x)u \in W^{\perp}$.

Dado w en W,

$$\langle \rho(x)u, w \rangle = \langle u, \underbrace{\rho(x^{-1})w}_{\in W} \rangle = 0.$$

1. Repaso de definiciones y conceptos auxiliares
2. Descomposiciones en subespacios invariantes
3. Teorema: existencia de un complemento invariante para un subespacio invariante
4. Primera demostración: simetrizamos un operador de proyección
5. Segunda demostración: usamos un producto interno tal que la representación es unitaria
6. Ejemplo

Ejemplo 1

$G = \mathbb{Z}_2, \quad V = \mathbb{C}^2,$

$$\rho(k + 2\mathbb{Z}) := J^k, \qquad J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ya hemos estudiado esta representación en clases anteriores.

$$W := \mathrm{lin}(e_1 + e_2) = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad S := \mathrm{lin}(e_1) = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad U := \mathrm{lin}(e_1 - e_2) = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que $V = W \dotplus S$ y $V = W \dotplus U$,
pero W, U son ρ-invariantes y S no es ρ-invariante.

Ejemplo 2

Sea G un grupo finito arbitrario y sea $V = \mathbb{C}^3$. Para cada g en G, pongamos

$$\rho(g) \coloneqq I_5.$$

Obviamente, ρ es una representación.

Para cada subespacio W de V, W es ρ-invariante. Sean

$$W \coloneqq \mathrm{lin}(e_1), \qquad S \coloneqq \mathrm{lin}(e_2 - e_3, e_3), \qquad U \coloneqq \mathrm{lin}(e_2, e_3).$$

$$V = W \dot{+} S, \qquad V = W \dot{+} U.$$

W tiene varios subespacios complementarios ρ-invariantes.