Cambio de bases (repaso de álgebra lineal)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

30 de octubre de 2026

Objetivos de este tema

En este tema, suponemos que V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita n.
Vamos a repasar los siguientes conceptos y teoremas:

- Correspondencia entre $\mathbb{C}^n$ y V.
- La matriz de cambio de base.
- Correspondencia entre matrices y operadores.

  El cambio de la matriz asociada al cambiar la base.

Prerrequisitos para este tema

- Base (ordenada) de un espacio vectorial.
- Transformaciones lineales.
- Operaciones con matrices.
- El álgebra de operadores lineales, el álgebra de matrices.

1 La matriz asociada a un operador respecto a una base

2 Cambio de base

Transformaciones lineales

En este tema, trabajamos solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dados espacios vectoriales V y W, denotamos por $\mathrm{L}(V, W)$
el conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to W$.

$\mathrm{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

$\mathrm{Iso}(V, W) :=$ el conjunto de las transformaciones lineales invertibles $V \to W$.

$\mathrm{L}(V) := \mathrm{L}(V, V)$ es el álgebra de todos los operadores lineales $V \to V$.

$\mathrm{GL}(V) := \mathrm{Iso}(V, V)$ es el grupo de los isomorfismos $V \to V$ (automorfismos de V).

El isomorfismo inducido por una base (ordenada)

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V.

Definimos $\Phi_{\mathcal{A}} \colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$\Phi_{\mathcal{A}} x \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k a_k.$$

De la definición de base ordenada, se sigue que $\Phi_{\mathcal{A}} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^n, V)$.

Por lo tanto, existe $\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \colon V \to \mathbb{C}^n$.

Notación: para v en V,

$$v_{\mathcal{A}} \coloneqq \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} v.$$

Correspondencia entre las bases de $\mathbb{C}^n$ y V

Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y sea $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canónica en $\mathbb{C}^n$:

$$e_q := [\delta_{q,k}]_{k=1}^n.$$

Proposición

Para cada q en $\{1, \ldots, n\}$, $\quad \Phi_{\mathcal{A}} e_q = a_q \quad$ y $\quad \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} a_q = e_q$.

Demostración.

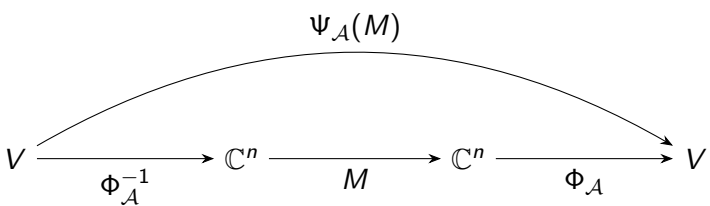
$$\Phi_{\mathcal{A}} e_q = \sum_{k=1}^{n} (e_q)_k a_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{q,k} a_k = a_q.$$

El operador asociado a una matriz respecto a una base

Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y sea $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Definimos $\Psi_{\mathcal{A}}(M)\colon V \to V$,

$$\Psi_{\mathcal{A}}(M) \coloneqq \Phi_{\mathcal{A}} M \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}.$$



Correspondencia entre los operadores y las matrices

$$\Psi_{\mathcal{A}}(M) \coloneqq \Phi_{\mathcal{A}} M \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}.$$

Proposición

$\Psi_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{L}(V)$ es un isomorfismo de álgebras complejas con identidad.

Demostración: ejercicio.

La matriz asociada a un operador respecto a una base

Notación: dado T en $\mathrm{L}(V)$, $\quad T_{\mathcal{A}} \coloneqq \Psi_{\mathcal{A}}^{-1}(T)$.

Proposición

Sean $\mathcal{A}$ una base de V, $T \in \mathrm{L}(V)$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Son equivalentes:

(a) $\Psi_{\mathcal{A}}(M) = T$,

(b) $T_{\mathcal{A}} = M$,

(c) $\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad Ta_k = \sum_{j=1}^{n} M_{j,k} a_j$.

Demostración, (c)⇒(c)

Supongamos que $\Psi_{\mathcal{A}}(M) = T$, esto es, $\Phi_{\mathcal{A}} M \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} = T$, esto es,

$$T\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{A}} M.$$

Luego, para cada k en $\{1, \ldots, n\}$,

$$Ta_k = T\Phi_{\mathcal{A}} e_k = \Phi_{\mathcal{A}} M e_k = \sum_{j=1}^{n} (Me_k)_j a_j = \sum_{j=1}^{n} M_{j,k} a_j.$$

Demostración, (c)⇒(a)

Supongamos que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad Ta_k = \sum_{j=1}^{n} M_{j,k} a_j.$$

Demostremos que $\Psi_{\mathcal{A}}(M) = T$. Para cada x en $\mathbb{C}^n$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}} M x &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} M_{j,k} x_k \right) a_j = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} M_{j,k} a_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k T a_k = T \left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_k \right) = T \Phi_{\mathcal{A}} x. \end{aligned}$$

Luego $\Phi_{\mathcal{A}} M = T \Phi_{\mathcal{A}}$ y $T = \Phi_{\mathcal{A}} M \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} = \Psi_{\mathcal{A}}(M)$.

1. La matriz asociada a un operador respecto a una base

2. Cambio de base

La matriz de cambio de base

Sean $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ bases ordenadas de V y sea $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ la matriz de cambio de base:

$$b_k = \sum_{j=1}^{n} P_{j,k} a_j.$$

Por ejemplo, si $n = 3$ y

$$P = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix},$$

entonces

$$b_2 = P_{1,2} a_1 + P_{2,2} a_2 + P_{3,2} a_3.$$

Cambio de base

Teorema

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V y sea P la matriz de cambio de base. Entonces,

- $\Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}} P$,
- $\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} = P \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$,
- $\forall v \in V \quad v_{\mathcal{A}} = P v_{\mathcal{B}}$.

Demostración

Estamos suponiendo que P es la matriz de cambio de base:

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad b_k = \sum_{j=1}^{n} P_{j,k} a_j.$$

Demostración

Estamos suponiendo que P es la matriz de cambio de base:

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad b_k = \sum_{j=1}^{n} P_{j,k} a_j.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\Phi_{\mathcal{B}} x = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} P_{j,k} a_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} P_{j,k} x_k \right) a_j = \Phi_{\mathcal{A}}(Px).$$

Demostración

Estamos suponiendo que P es la matriz de cambio de base:

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad b_k = \sum_{j=1}^{n} P_{j,k} a_j.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\Phi_{\mathcal{B}} x = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} P_{j,k} a_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} P_{j,k} x_k \right) a_j = \Phi_{\mathcal{A}}(Px).$$

Hemos demostrado que $\Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}} P$.

Demostración

Hemos demostrado que

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}} P.$$

Demostración

Hemos demostrado que

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}} P.$$

Multiplimos por $\Phi_{\mathcal{A}}^{-1}$ del lado izquierdo y por $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ del lado derecho:

$$\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} = P \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Demostración

Hemos demostrado que

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}} P.$$

Multiplimos por $\Phi_{\mathcal{A}}^{-1}$ del lado izquierdo y por $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ del lado derecho:

$$\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} = P \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Luego, para cada v en V,

$$v_{\mathcal{A}} = P v_{\mathcal{B}}.$$

Cambio de base y operadores

Teorema

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V.

- Para cada M en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$$\Psi_{\mathcal{A}}(M) = \Psi_{\mathcal{B}}(P^{-1}MP).$$
- Para cada T en $\mathrm{L}(V)$,
$$\Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(T) = P^{-1}\Psi_{\mathcal{A}}^{-1}(T)P.$$
- Para cada T en $\mathrm{L}(V)$,
$$T_{\mathcal{B}} = P^{-1}T_{\mathcal{A}}P.$$

Demostración

Recordamos que

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}} P, \qquad \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} = P \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}, \qquad \Psi_{\mathcal{A}}(M) := \Phi_{\mathcal{A}} M \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}.$$

Luego

$$\Psi_{\mathcal{A}}(M) = \Phi_{\mathcal{A}} M \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} = \Phi_{\mathcal{B}} P^{-1} M P \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} = \Psi_{\mathcal{B}}(P^{-1} M P).$$

Si $T \in \mathrm{L}(V)$ y $M = T_{\mathcal{A}} = \Psi_{\mathcal{A}}^{-1}(T)$, entonces

$$T = \Psi_{\mathcal{B}}(P^{-1} M P),$$

$$T_{\mathcal{B}} = \Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(T) = P^{-1} \Psi_{\mathcal{A}}^{-1}(T) P = P^{-1} T_{\mathcal{A}} P.$$