El centralizador de una representación de un grupo finito (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

30 de octubre de 2026

Objetivos de este tema

En este tema, estamos trabajando con grupos finitos
y sus representaciones lineales sobre espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Vamos a

- introducir el concepto del centralizador de una representación;
- conocer ejemplos.

Prerrequisitos para este tema

- el concepto de morfismo de representaciones;
- el álgebra de operadores lineales en un espacio vectorial.

1 Repaso

2 El centralizador de una representación

3 Ejemplos

Transformaciones lineales

En este tema, trabajamos solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dados espacios vectoriales V y W, denotamos por $\mathrm{L}(V, W)$ o $\mathrm{Hom}(V, W)$
el conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to W$.

$\mathrm{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

$\mathrm{L}(V) \coloneqq \mathrm{L}(V, V)$ es el álgebra de todos los operadores lineales $V \to V$.

Dado un espacio vectorial V, denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ al grupo de sus automorfismos
(isomorfismos $V \to V$).

Representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos.

Una representación lineal de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

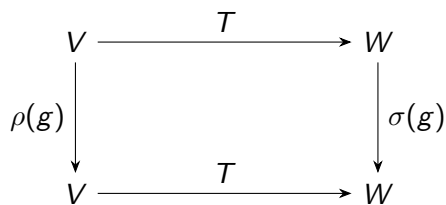
Vamos a trabajar solamente con representaciones lineales, por eso decimos simplemente representación.

Si $\dim(V) = n$, se dice que n es el grado de la representación ρ.

Morfismo de representaciones (operador de entrelace)

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.
Un morfismo entre ρ y σ es una transformación lineal $T\colon V \to W$ tal que

$$\forall g \in G \qquad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$



También se dice que T es es un operador de entrelace entre ρ y σ.

1 Repaso

2 El centralizador de una representación

3 Ejemplos

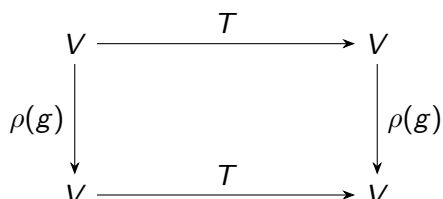
El centralizador (conmutante) de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación.

El centralizador de ρ se define como el conjunto de todos los morfismos entre ρ y ρ:

$$\mathcal{C}(\rho) \coloneqq \Big\{ T \in \mathrm{L}(V)\colon \quad \forall g \in G \quad T\rho(g) = \rho(g)\,T \Big\}.$$

Otra notación: $\mathrm{End}_{\rho}(V)$.



El centralizador (conmutante) de una representación

Proposición

$\mathcal{C}(\rho)$ es una subálgebra de $\mathrm{L}(V)$. Además, $I_V \in \mathcal{C}(\rho)$.

El centralizador (conmutante) de una representación

Proposición

$\mathcal{C}(\rho)$ es una subálgebra de $\mathrm{L}(V)$. Además, $I_V \in \mathcal{C}(\rho)$.

Idea de demostración.

Mostremos que si $S, T \in \mathcal{C}(\rho)$, entonces $ST \in \mathcal{C}(\rho)$. En efecto, para cada g en G,

$$ST\rho(g) = S\rho(g)T = \rho(g)ST.$$

El núcleo e imagen de un operador perteneciente al centralizador

Proposición

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea $T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Entonces, $\ker(\rho)$ e $\mathrm{im}(\rho)$ son subespacios ρ-invariantes, es decir,

$$\forall g \in G \qquad \rho(g)[\ker(T)] \subseteq \ker(T), \qquad \rho(g)[\mathrm{im}(T)] \subseteq \mathrm{im}(T).$$

El núcleo e imagen de un operador perteneciente al centralizador

Proposición

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea $T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Entonces, $\ker(\rho)$ e $\mathrm{im}(\rho)$ son subespacios ρ-invariantes, es decir,

$$\forall g \in G \qquad \rho(g)[\ker(T)] \subseteq \ker(T), \qquad \rho(g)[\mathrm{im}(T)] \subseteq \mathrm{im}(T).$$

Demostración: ejercicio.

1 Repaso

2 El centralizador de una representación

3 Ejemplos

Ejemplo 1

$G = S_3$. Denotamos sus elementos de la siguiente manera:

$$e = a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a^2 b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que en este ejemplo $a^3 = e$, $b^2 = e$.

Ejemplo 1

Sea $\varepsilon_3 := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{3}$.

Ejemplo 1

Sea $\varepsilon_3 := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{3}$.

Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$,

$$\rho(a^k) = \begin{bmatrix} \varepsilon_3^k & 0 \\ 0 & \varepsilon_3^{-k} \end{bmatrix}, \qquad \rho(a^k b) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_3^k \\ \varepsilon_3^{-k} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: demostrar que ρ es una representación.

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

$X = X_{1,1} I_2$.

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

$X = X_{1,1} I_2$. Luego $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C} I_2$.

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

$X = X_{1,1} I_2$. Luego $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C} I_2$. Por lo tanto, ρ es irreducible.

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 =$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 =$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Como el grupo G es conmutativo y $\dim(V) = 2$, concluimos que

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Como el grupo G es conmutativo y $\dim(V) = 2$, concluimos que ρ es reducible (tiene un subespacio invariante de dimensión 1).

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Como el grupo G es conmutativo y $\dim(V) = 2$, concluimos que ρ es reducible (tiene un subespacio invariante de dimensión 1).

Concluimos que $\mathcal{C}(\rho)$ contiene no solamente matrices escalares.

Ejemplo 2: calculemos $\mathcal{C}(\rho)$ de manera explícita

Obviamente, $X \in \mathcal{C}(\rho)$ ssi $AX - XA = 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} AX - XA &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ -X_{1,1} - X_{2,1} & -X_{1,2} - X_{2,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -X_{1,2} & X_{1,1} - X_{1,2} \\ -X_{2,2} & X_{2,1} - X_{2,2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_{1,2} + X_{2,1} & -X_{1,1} + X_{1,2} + X_{2,2} \\ -X_{1,1} - X_{2,1} + X_{2,2} & -X_{1,2} - X_{2,1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2: la forma explícita de $\mathcal{C}(\rho)$

$$X \in \mathcal{C}(\rho) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} X_{1,2} + X_{2,1} & -X_{1,1} + X_{1,2} + X_{2,2} \\ -X_{1,1} - X_{2,1} + X_{2,2} & -X_{1,2} - X_{2,1} \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}.$$

Encontramos la forma general de los elementos de $\mathcal{C}(\rho)$:

$$X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ -X_{1,2} & X_{1,1} - X_{1,2} \end{bmatrix} = X_{1,1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + X_{1,2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Conclusión:

$$\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I + \mathbb{C}\, A.$$