Lema de Schur
para representaciones finito-dimensionales de grupos finitos
(un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

9 de noviembre de 2026

Objetivos

- repasar los primeros conceptos de la teoría de representaciones;
- demostrar que el núcleo y la imagen de un morfismo de representaciones son subespacios invariantes;
- demostrar el lema de Schur.

Prerrequisitos

- Morfismos de representaciones. Isomorfismos. Centralizador.
- Subespacios invariantes de una representación. Representaciones irreducibles.

1. Repaso de definiciones básicas
2. Repaso: el núcleo y la imagen de un morfismo
3. Lema de Schur
4. Corolario: sobre el espacio de los morfismos de dos representaciones irreducibles
5. Ejemplo

1. Repaso de definiciones básicas
2. Repaso: el núcleo y la imagen de un morfismo
3. Lema de Schur
4. Corolario: sobre el espacio de los morfismos de dos representaciones irreducibles
5. Ejemplo

Bibliografía: los primeros trabajos clásicos



Ferdinand Georg Frobenius (1896, 1897):

Über vertauschbare Matrizen (1896).

Über Gruppencharaktere (1896).

Über die Primfactoren der Gruppendeterminante (1896).

Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen (1897).



Issai Schur (1905):

Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ se llama **irreducible**
si $V \neq \{0_V\}$ y no existe ρ-subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ se llama **irreducible**
si $V \neq \{0_V\}$ y no existe ρ-subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}$ es una representación y S es un ρ-subespacio de V tal que $S \neq \{0_V\}$,
se dice que S que es irreducible si ρ^S es irreducible.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ se llama **irreducible**
si $V \neq \{0_V\}$ y no existe ρ-subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

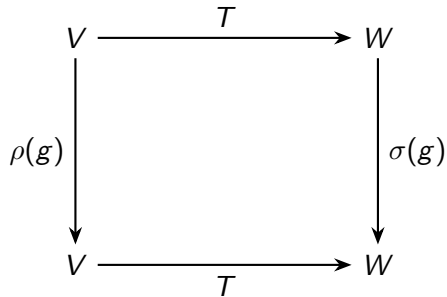
Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}$ es una representación y S es un ρ-subespacio de V tal que $S \neq \{0_V\}$,
se dice que S que es irreducible si ρ^S es irreducible.

En otras palabras,
S es irreducible si no existe ρ-subespacio W de S tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq S$.

Morfismos de representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones.

$$\mathrm{Hom}_G(\varphi,\sigma) \coloneqq \Big\{ T \in \mathrm{L}(V,W)\colon \quad \forall g \in G \qquad T\rho(g) = \sigma(g)T \Big\}.$$



1 Repaso de definiciones básicas

2 Repaso: el núcleo y la imagen de un morfismo

3 Lema de Schur

4 Corolario: sobre el espacio de los morfismos de dos representaciones irreducibles

5 Ejemplo

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\ker(T)$ es un subespacio ρ-invariante de V.

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\ker(T)$ es un subespacio ρ-invariante de V.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v)$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\ker(T)$ es un subespacio ρ-invariante de V.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) =$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\ker(T)$ es un subespacio ρ-invariante de V.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = \sigma(g)Tv$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\ker(T)$ es un subespacio ρ-invariante de V.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = \sigma(g)Tv =$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\ker(T)$ es un subespacio ρ-invariante de V.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = \sigma(g)Tv = \sigma(g)0_W = 0_W,$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\ker(T)$ es un subespacio ρ-invariante de V.

Demostración. Si $v \in \ker(T)$ y $g \in G$, entonces

$$T(\rho(g)v) = \sigma(g)Tv = \sigma(g)0_W = 0_W,$$

así que $\rho(g)v \in \ker(T)$.

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.

Demostración.

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.

Demostración.

Sea $w \in \mathrm{im}(T)$. Elegimos v en V tal que $w = Tv$.

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.

Demostración.

Sea $w \in \mathrm{im}(T)$. Elegimos v en V tal que $w = Tv$.

Luego, para cada g en G,

$$\sigma(g)w$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.

Demostración.

Sea $w \in \mathrm{im}(T)$. Elegimos v en V tal que $w = Tv$.

Luego, para cada g en G,

$$\sigma(g)w =$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.

Demostración.

Sea $w \in \mathrm{im}(T)$. Elegimos v en V tal que $w = Tv$.

Luego, para cada g en G,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)Tv$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.

Demostración.

Sea $w \in \mathrm{im}(T)$. Elegimos v en V tal que $w = Tv$.

Luego, para cada g en G,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)Tv =$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.

Demostración.

Sea $w \in \mathrm{im}(T)$. Elegimos v en V tal que $w = Tv$.

Luego, para cada g en G,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)Tv = T(\rho(g)v)$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.

Demostración.

Sea $w \in \mathrm{im}(T)$. Elegimos v en V tal que $w = Tv$.

Luego, para cada g en G,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)Tv = T(\rho(g)v) \in$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones y $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, entonces $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.

Demostración.

Sea $w \in \mathrm{im}(T)$. Elegimos v en V tal que $w = Tv$.

Luego, para cada g en G,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)Tv = T(\rho(g)v) \in \mathrm{im}(T).$$

1 Repaso de definiciones básicas

2 Repaso: el núcleo y la imagen de un morfismo

3 Lema de Schur

4 Corolario: sobre el espacio de los morfismos de dos representaciones irreducibles

5 Ejemplo

Lema de Schur

El "Lema de Schur" consiste de los siguientes dos teoremas importantes.

Teorema (lema de Schur para homomorfismos de representaciones irreducibles)

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones irreducibles y sea $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$.

Entonces, T es un isomorfismo o T es cero.

Teorema (lema de Schur para automorfismos de representaciones irreducibles)

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación. Entonces,

$$\rho \text{ es irreducible} \iff \mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I_V.$$

Lema de Schur para homomorfismos de representaciones irreducibles

Teorema

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones irreducibles y sea $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$.

Entonces, T es un isomorfismo o T es cero.

Lema de Schur para homomorfismos de representaciones irreducibles

Teorema

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones irreducibles y sea $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$.

Entonces, T es un isomorfismo o T es cero.

Otra forma lógica: si T no es cero, entonces T es un isomorfismo.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W. Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W. Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible,

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W. Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(T) = \{0_V\}$ o $\ker(T) = V$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W. Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(T) = \{0_V\}$ o $\ker(T) = V$.

Como σ es irreducible,

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W. Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(T) = \{0_V\}$ o $\ker(T) = V$.

Como σ es irreducible, $\mathrm{im}(T) = \{0_W\}$ o $\mathrm{im}(T) = W$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W. Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(T) = \{0_V\}$ o $\ker(T) = V$.

Como σ es irreducible, $\mathrm{im}(T) = \{0_W\}$ o $\mathrm{im}(T) = W$.

Caso I. $\ker(T) = V$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.
Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(T) = \{0_V\}$ o $\ker(T) = V$.

Como σ es irreducible, $\mathrm{im}(T) = \{0_W\}$ o $\mathrm{im}(T) = W$.

Caso I. $\ker(T) = V$.
En este caso, T es cero.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.
Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(T) = \{0_V\}$ o $\ker(T) = V$.

Como σ es irreducible, $\mathrm{im}(T) = \{0_W\}$ o $\mathrm{im}(T) = W$.

Caso I. $\ker(T) = V$.
En este caso, T es cero.

Caso II. $\ker(T) = \{0_V\}$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.
Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(T) = \{0_V\}$ o $\ker(T) = V$.

Como σ es irreducible, $\mathrm{im}(T) = \{0_W\}$ o $\mathrm{im}(T) = W$.

Caso I. $\ker(T) = V$.
En este caso, T es cero.

Caso II. $\ker(T) = \{0_V\}$.
Como $\ker(T) \neq V$, tenemos que

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.
Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(T) = \{0_V\}$ o $\ker(T) = V$.

Como σ es irreducible, $\mathrm{im}(T) = \{0_W\}$ o $\mathrm{im}(T) = W$.

Caso I. $\ker(T) = V$.
En este caso, T es cero.

Caso II. $\ker(T) = \{0_V\}$.
Como $\ker(T) \neq V$, tenemos que $\mathrm{im}(T) \neq \{0_W\}$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(T)$ es un ρ-subespacio de V e $\mathrm{im}(T)$ es un σ-subespacio de W.
Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(T) = \{0_V\}$ o $\ker(T) = V$.

Como σ es irreducible, $\mathrm{im}(T) = \{0_W\}$ o $\mathrm{im}(T) = W$.

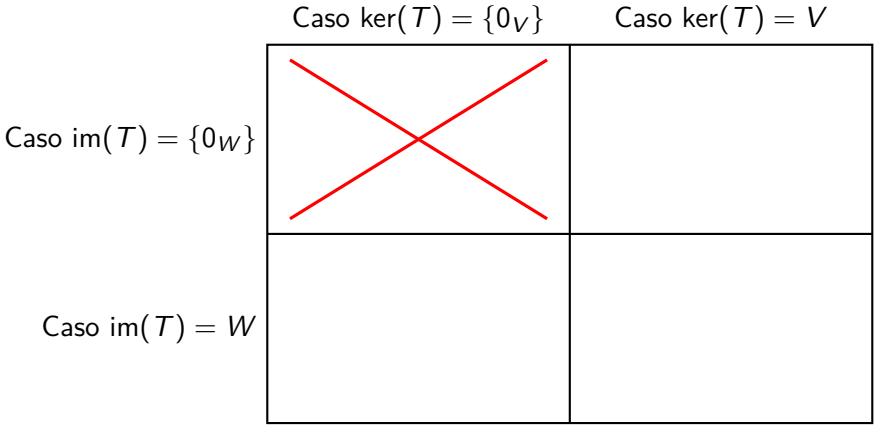
Caso I. $\ker(T) = V$.
En este caso, T es cero.

Caso II. $\ker(T) = \{0_V\}$.
Como $\ker(T) \neq V$, tenemos que $\mathrm{im}(T) \neq \{0_W\}$.
Luego $\mathrm{im}(T) = W$ y T es invertible. □

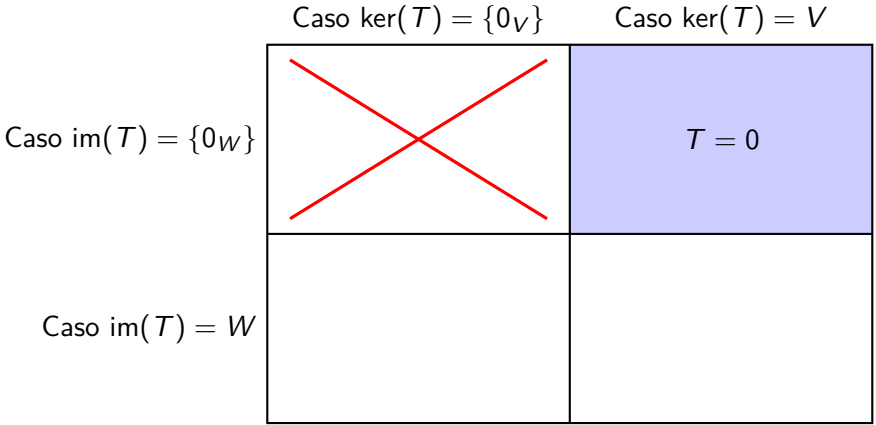
También podemos visualizar los casos posibles con una tabla

	Caso $\ker(T) = \{0_V\}$	Caso $\ker(T) = V$
Caso $\text{im}(T) = \{0_W\}$		
Caso $\text{im}(T) = W$		

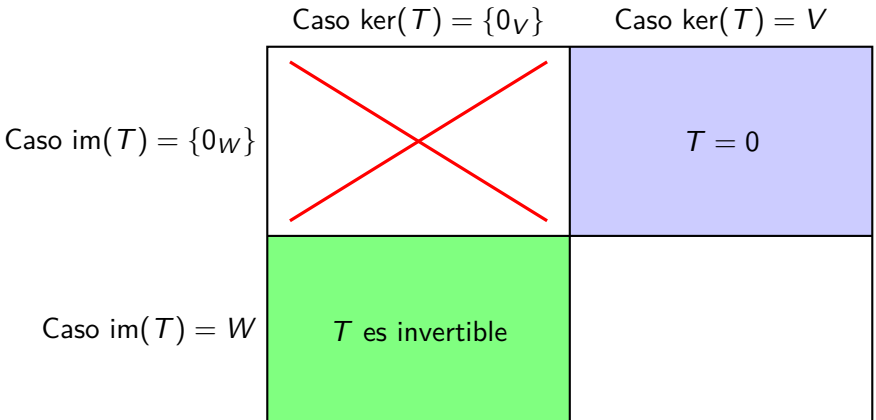
También podemos visualizar los casos posibles con una tabla



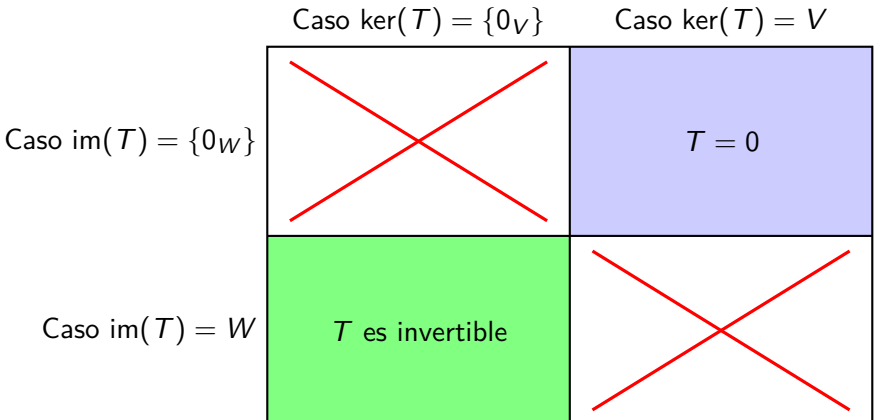
También podemos visualizar los casos posibles con una tabla



También podemos visualizar los casos posibles con una tabla



También podemos visualizar los casos posibles con una tabla



Lema de Schur para automorfismos de representaciones irreducibles

Teorema

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación,

$$\rho \text{ es irreducible} \iff \mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I_V.$$

Lema de Schur para automorfismos de representaciones irreducibles

Teorema

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación,

$$\rho \text{ es irreducible} \quad \iff \quad \mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I_V.$$

Vamos a escribir I en vez de I_V.

Recordemos que $\mathbb{C}\, I$ es el álgebra de todos los operadores escalares:

$$\mathbb{C}\, I \coloneqq \{\lambda I\colon \ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(\rho) \subseteq \mathbb{C}\, I$.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(\rho) \subseteq \mathbb{C}\, I$.

Sea $T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(\rho) \subseteq \mathbb{C}\, I$.

Sea $T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $T \in \mathrm{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo,

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(\rho) \subseteq \mathbb{C}\, I$.

Sea $T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $T \in \mathrm{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo,
existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ es un valor propio de T,

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(\rho) \subseteq \mathbb{C}\, I$.

Sea $T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $T \in \mathrm{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo,
existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ es un valor propio de T,
esto es, $\lambda I - T$ no es un isomorfismo.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(\rho) \subseteq \mathbb{C}\, I$.

Sea $T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $T \in \mathrm{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo,
existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ es un valor propio de T,
esto es, $\lambda I - T$ no es un isomorfismo.

Notamos que $\lambda I - T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(\rho) \subseteq \mathbb{C}\, I$.

Sea $T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $T \in \mathrm{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo,
existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ es un valor propio de T,
esto es, $\lambda I - T$ no es un isomorfismo.

Notamos que $\lambda I - T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Por el lema de Schur (primera parte), $\lambda I - T = 0$.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(\rho) \subseteq \mathbb{C}\, I$.

Sea $T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $T \in \mathrm{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo,
existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ es un valor propio de T,
esto es, $\lambda I - T$ no es un isomorfismo.

Notamos que $\lambda I - T \in \mathcal{C}(\rho)$.

Por el lema de Schur (primera parte), $\lambda I - T = 0$.

Luego $T = \lambda I$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ-subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ-subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\mathrm{im}(P) = W$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ-subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\mathrm{im}(P) = W$.

Por la suposición, $P = \lambda I$ para algún λ en $\mathbb{C}$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ-subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\mathrm{im}(P) = W$.

Por la suposición, $P = \lambda I$ para algún λ en $\mathbb{C}$.

Notamos que $\lambda^2 I = P^2 = P = \lambda I$, de donde $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ-subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\mathrm{im}(P) = W$.

Por la suposición, $P = \lambda I$ para algún λ en $\mathbb{C}$.

Notamos que $\lambda^2 I = P^2 = P = \lambda I$, de donde $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

Si $\lambda = 0$, entonces $P = 0_{\mathrm{L}(V)}$ e $W = \mathrm{im}(P) = \{0_V\}$. Contradicción.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}\, I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ-subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\mathrm{im}(P) = W$.

Por la suposición, $P = \lambda I$ para algún λ en $\mathbb{C}$.

Notamos que $\lambda^2 I = P^2 = P = \lambda I$, de donde $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

Si $\lambda = 0$, entonces $P = 0_{\mathrm{L}(V)}$ e $W = \mathrm{im}(P) = \{0_V\}$. Contradicción.

Si $\lambda = 1$, entonces $P = I$ e $W = \mathrm{im}(P) = V$. Contradicción.

1 Repaso de definiciones básicas

2 Repaso: el núcleo y la imagen de un morfismo

3 Lema de Schur

4 Corolario: sobre el espacio de los morfismos de dos representaciones irreducibles

5 Ejemplo

El espacio de morfismos entre dos representaciones irreducibles

Proposición

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones irreducibles.

I. Si existe un isomorfismo entre ρ y σ, entonces $\dim(\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)) = 1$.

II. Si no existe un isomorfismo entre ρ y σ, entonces $\dim(\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)) = 0$.

Demostración, parte I

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ y T es invertible.

Demostración, parte I

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ y T es invertible.

Vamos a mostrar que $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma) = \mathbb{C}\, T$.

Demostración, parte I

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ y T es invertible.

Vamos a mostrar que $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma) = \mathbb{C}\, T$.

Para cada S en $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, tenemos que

$$T^{-1}S \in \mathrm{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Demostración, parte I

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ y T es invertible.

Vamos a mostrar que $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma) = \mathbb{C}\, T$.

Para cada S en $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, tenemos que

$$T^{-1}S \in \mathrm{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Por la segunda parte del lema de Schur,

Demostración, parte I

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ y T es invertible.

Vamos a mostrar que $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma) = \mathbb{C}\, T$.

Para cada S en $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, tenemos que

$$T^{-1}S \in \mathrm{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $T^{-1}S = \lambda I_V$.

Demostración, parte I

Supongamos que $T \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ y T es invertible.

Vamos a mostrar que $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma) = \mathbb{C}\, T$.

Para cada S en $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$, tenemos que

$$T^{-1}S \in \mathrm{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $T^{-1}S = \lambda I_V$.
Concluimos que $S = \lambda T$.

Demostración, parte II

Supongamos que todos los elementos de $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ no son invertibles.

Demostración, parte II

Supongamos que todos los elementos de $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ no son invertibles.

Entonces, por la primera parte del lema de Schur,

Demostración, parte II

Supongamos que todos los elementos de $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ no son invertibles.

Entonces, por la primera parte del lema de Schur,
cada elemento de $\mathrm{Hom}_G(\rho, \sigma)$ es la transformación cero.

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\operatorname{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Demostración.

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\operatorname{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Demostración.

Notamos que $\operatorname{tr}(I_V)$

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Demostración.

Notamos que $\mathrm{tr}(I_V) =$

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Demostración.

Notamos que $\mathrm{tr}(I_V) = \dim(V)$.

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Demostración.

Notamos que $\mathrm{tr}(I_V) = \dim(V)$.

Si $A = \lambda I_V$, entonces

$$\mathrm{tr}(A)$$

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Demostración.

Notamos que $\mathrm{tr}(I_V) = \dim(V)$.

Si $A = \lambda I_V$, entonces

$$\mathrm{tr}(A) =$$

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\operatorname{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Demostración.

Notamos que $\operatorname{tr}(I_V) = \dim(V)$.

Si $A = \lambda I_V$, entonces

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda \operatorname{tr}(I_V)$$

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\operatorname{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Demostración.

Notamos que $\operatorname{tr}(I_V) = \dim(V)$.

Si $A = \lambda I_V$, entonces

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda \operatorname{tr}(I_V) =$$

Observación: los operadores escalares y la traza

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq \{0_V\}$ y $A \in \mathbb{C}\, I_V$, entonces

$$A = \frac{\operatorname{tr}(A)}{\dim(V)}\, I_V.$$

Demostración.

Notamos que $\operatorname{tr}(I_V) = \dim(V)$.

Si $A = \lambda I_V$, entonces

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda \operatorname{tr}(I_V) = \lambda \dim(V).$$

Corolario: sobre un operador lineal simetrizado respecto a una representación irreducible

Corolario

Sean G un grupo finito, V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación irreducible del grupo G y $T \in \mathrm{L}(V)$.
Definimos $S\colon V \to V$,

$$S := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})\, T\, \rho(g).$$

Entonces,

$$S = \frac{\mathrm{tr}(T)}{\dim(V)}\, I.$$

Demostración

Ya sabemos que $S \in \mathcal{C}(\rho)$.

Demostración

Ya sabemos que $S \in \mathcal{C}(\rho)$.

Por la propiedad $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A)$, obtenemos que

$$\operatorname{tr}(S) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\rho(g^{-1}) T \rho(g)) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(T).$$

Demostración

Ya sabemos que $S \in \mathcal{C}(\rho)$.

Por la propiedad $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A)$, obtenemos que

$$\operatorname{tr}(S) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\rho(g^{-1}) T \rho(g)) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(T).$$

Como ρ es irreducible, por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que

$$S = \lambda I.$$

Aplicando tr a ambos lados, obtenemos que

Demostración

Ya sabemos que $S \in \mathcal{C}(\rho)$.

Por la propiedad $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A)$, obtenemos que

$$\operatorname{tr}(S) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\rho(g^{-1}) T \rho(g)) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(T).$$

Como ρ es irreducible, por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que

$$S = \lambda I.$$

Aplicando tr a ambos lados, obtenemos que $\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(S) = \lambda \dim(V)$ y $\lambda = \dfrac{\operatorname{tr}(T)}{\dim(V)}$.

1. Repaso de definiciones básicas
2. Repaso: el núcleo y la imagen de un morfismo
3. Lema de Schur
4. Corolario: sobre el espacio de los morfismos de dos representaciones irreducibles
5. Ejemplo

Ejemplo

$G = S_3$. Denotamos sus elementos de la siguiente manera:

$$e = a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a^2 b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que en este ejemplo $a^3 = e$, $b^2 = e$.

Ejemplo

Sea $\varepsilon_3 := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{3}$.

Ejemplo

Sea $\varepsilon_3 := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{3}$.

Definimos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$,

$$\rho(a^k) = \begin{bmatrix} \varepsilon_3^k & 0 \\ 0 & \varepsilon_3^{-k} \end{bmatrix}, \qquad \rho(a^k b) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_3^k \\ \varepsilon_3^{-k} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: demostrar que ρ es una representación.

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

$X = X_{1,1} I_2$.

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

$X = X_{1,1} I_2$. Luego $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C} I_2$.

Ejemplo

Calculemos el centralizador de ρ. Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,1} = X_{2,2}, \qquad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

$X = X_{1,1} I_2$. Luego $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C} I_2$. Por lo tanto, ρ es irreducible.