

Lema de Schur

para representaciones finito-dimensionales de grupos finitos

(un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko

<https://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

23 de febrero de 2026

Objetivos

- repasar los primeros conceptos de la teoría de representaciones;
- demostrar que el núcleo y la imagen de un morfismo de representaciones son subespacios invariantes;
- demostrar el lema de Schur.

Prerrequisitos

- el concepto de morfismo entre representaciones;
- el concepto de representación irreducible;
- conceptos básicos de álgebra lineal.

- 1 Definiciones básicas
- 2 El núcleo y la imagen de un morfismo
- 3 Lema de Schur
- 4 Corolario: estructura de morfismos entre dos representaciones irreducibles
- 5 Corolario: representaciones irreducibles de grupos conmutativos
- 6 Ejemplos

- 1 Definiciones básicas
- 2 El núcleo y la imagen de un morfismo
- 3 Lema de Schur
- 4 Corolario: estructura de morfismos entre dos representaciones irreducibles
- 5 Corolario: representaciones irreducibles de grupos conmutativos
- 6 Ejemplos

Bibliografía: los primeros trabajos clásicos



Ferdinand Georg Frobenius (1896, 1897):

Über vertauschbare Matrizen (1896).

Über Gruppencharaktere (1896).

Über die Primfactoren der Gruppendeterminante (1896).

Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen (1897).



Issai Schur (1905):

Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere.

Bibliografía: libros y apuntes más contemporáneos

 Gordon Douglas James, Martin W. Liebeck (2001):

Representations and characters of groups, 2nd ed.

 Stuart Martin (2011):

Representation theory. Lecture notes.

 Jean-Pierre Serre (1977):

Linear representations of finite groups.

 Peter Webb (2016):

A course in finite group representation theory.

Representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos
y solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dado un espacio vectorial V , denotamos por $GL(V)$ al grupo de sus automorfismos
(isomorfismos $V \rightarrow V$).

Una **representación** (lineal) de un grupo G sobre un espacio vectorial V
es un homomorfismo $\rho: G \rightarrow GL(V)$.

Morfismos entre representaciones

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G .

Un morfismo entre ρ y σ es una transformación lineal $\varphi: V \rightarrow W$ tal que

$$\forall g \in G \quad \varphi \rho(g) = \sigma(g) \varphi.$$

Otros términos: φ es un mapeo G -lineal, φ entrelaza ρ y σ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \sigma(g) \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Una receta para promediar/simetrizar una transformación lineal y convertirla en un morfismo de representaciones

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G , y sea $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definimos $\psi: V \rightarrow W$,

$$\psi := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) \varphi \rho(g).$$

Entonces, $\psi \in \mathrm{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$.

Demostración

Para cada x en G ,

$$\psi\rho(x)$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\psi\rho(x) =$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\psi\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(x)$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\psi\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(x) \underline{\underline{h=gx, \ g=hx^{-1}}}$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\psi\rho(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(x) \xrightarrow{h=gx, \ g=hx^{-1}} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(xh^{-1})\varphi\rho(h)$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\begin{aligned}\psi\rho(x) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(x) \xrightarrow{h=gx, \ g=hx^{-1}} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(xh^{-1})\varphi\rho(h) \\ &= \end{aligned}$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\begin{aligned}\psi\rho(x) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(x) \xrightarrow{h=gx, \ g=hx^{-1}} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(xh^{-1})\varphi\rho(h) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(x)\sigma(h^{-1})\varphi\rho(h)\end{aligned}$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\begin{aligned}\psi\rho(x) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(x) \xrightarrow{h=gx, \ g=hx^{-1}} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(xh^{-1})\varphi\rho(h) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(x)\sigma(h^{-1})\varphi\rho(h) =\end{aligned}$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\begin{aligned}\psi\rho(x) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(x) \xrightarrow{h=gx, \ g=hx^{-1}} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(xh^{-1})\varphi\rho(h) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(x)\sigma(h^{-1})\varphi\rho(h) = \sigma(x) \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(h^{-1})\varphi\rho(h)\end{aligned}$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\begin{aligned}\psi\rho(x) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(x) \xrightarrow{h=gx, \ g=hx^{-1}} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(xh^{-1})\varphi\rho(h) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(x)\sigma(h^{-1})\varphi\rho(h) = \sigma(x) \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(h^{-1})\varphi\rho(h) =\end{aligned}$$

Demostración

Para cada x en G ,

$$\begin{aligned}\psi\rho(x) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(x) \xrightarrow{h=gx, \ g=hx^{-1}} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(xh^{-1})\varphi\rho(h) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(x)\sigma(h^{-1})\varphi\rho(h) = \sigma(x) \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(h^{-1})\varphi\rho(h) = \sigma(x)\psi.\end{aligned}$$

El espacio vectorial de morfismos

Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $V \rightarrow W$.

El espacio vectorial de morfismos

Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $V \rightarrow W$.

Si $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ son representaciones del grupo G , denotamos por $\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ al conjunto de todos morfismos entre ρ y σ :

$$\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(V, W) : \quad \forall g \in G \quad \varphi \rho(g) = \sigma(g) \varphi \right\}.$$

El espacio vectorial de morfismos

Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $V \rightarrow W$.

Si $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ son representaciones del grupo G , denotamos por $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ al conjunto de todos morfismos entre ρ y σ :

$$\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(V, W) : \quad \forall g \in G \quad \varphi \rho(g) = \sigma(g) \varphi \right\}.$$

Proposición

$\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(V, W)$.

El espacio vectorial de morfismos

Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $V \rightarrow W$.

Si $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ son representaciones del grupo G , denotamos por $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ al conjunto de todos morfismos entre ρ y σ :

$$\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(V, W) : \quad \forall g \in G \quad \varphi \rho(g) = \sigma(g) \varphi \right\}.$$

Proposición

$\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(V, W)$.

Demostración: ejercicio.

El centralizador de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación.

El **centralizador** o **conmutante** de ρ se define como el conjunto de todos los operadores lineales $T: V \rightarrow V$ que conmutan con $\rho(g)$ para cada g en G :

$$\mathcal{C}(\rho) := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(V) : \quad \forall g \in G \quad \varphi \rho(g) = \rho(g) \varphi \right\}.$$

El centralizador de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación.

El **centralizador** o **conmutante** de ρ se define como el conjunto de todos los operadores lineales $T: V \rightarrow V$ que conmutan con $\rho(g)$ para cada g en G :

$$\mathcal{C}(\rho) := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(V) : \quad \forall g \in G \quad \varphi \rho(g) = \rho(g) \varphi \right\}.$$

Otra notación: $\mathrm{End}_{G,\rho}(V)$.

El centralizador de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación.

El **centralizador** o **conmutante** de ρ se define como el conjunto de todos los operadores lineales $T: V \rightarrow V$ que conmutan con $\rho(g)$ para cada g en G :

$$\mathcal{C}(\rho) := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(V) : \quad \forall g \in G \quad \varphi \rho(g) = \rho(g) \varphi \right\}.$$

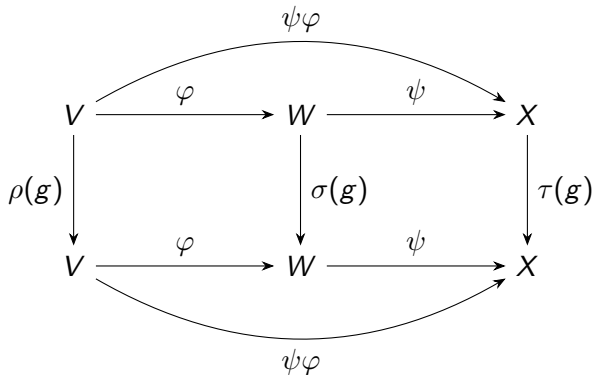
Otra notación: $\mathrm{End}_{G,\rho}(V)$.

Notemos que siempre $\mathbb{C}I_V \subseteq \mathcal{C}(\rho)$, donde

$$\mathbb{C}I_V := \{ \lambda I_V : \lambda \in \mathbb{C} \}.$$

Composición de morfismos

Ejercicio. Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$, $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$, $\tau: G \rightarrow \text{GL}(X)$ representaciones, $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, $\psi \in \text{Hom}_{G,\sigma,\tau}(W, X)$. Mostrar que $\psi\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\tau}(V, X)$.



El morfismo identidad

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación.

El morfismo identidad

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Denotamos por I_V al operador identidad $V \rightarrow V$:

$$I_V(x) := x \quad (x \in V).$$

El morfismo identidad

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación.

Denotamos por I_V al operador identidad $V \rightarrow V$:

$$I_V(x) := x \quad (x \in V).$$

Ejercicio. Sean $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ representaciones.

Mostrar que

$$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) \quad \varphi I_V = \varphi,$$

$$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{G,\sigma,\rho}(V, W) \quad I_W \varphi = \varphi.$$

El morfismo identidad

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación.

Denotamos por I_V al operador identidad $V \rightarrow V$:

$$I_V(x) := x \quad (x \in V).$$

Ejercicio. Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones.

Mostrar que

$$\forall \varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W) \quad \varphi I_V = \varphi,$$

$$\forall \varphi \in \text{Hom}_{G,\sigma,\rho}(V, W) \quad I_W \varphi = \varphi.$$

Debido a este resultado, podemos decir que I_V es el morfismo identidad de ρ .

Isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G .

Un morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama **isomorfismo** entre ρ y σ si existe $\psi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $\psi\varphi = I_V$ y $\varphi\psi = I_W$.

Isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G .

Un morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama **isomorfismo** entre ρ y σ si existe $\psi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $\psi\varphi = I_V$ y $\varphi\psi = I_W$.

Proposición

Si $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es una transformación lineal invertible, entonces $\varphi^{-1} \in \text{Hom}_{G,\sigma,\rho}(W, V)$.

Isomorfismos entre representaciones

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones del grupo G .

Un morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ se llama **isomorfismo** entre ρ y σ si existe $\psi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(W, V)$ tal que $\psi\varphi = I_V$ y $\varphi\psi = I_W$.

Proposición

Si $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es una transformación lineal invertible, entonces $\varphi^{-1} \in \text{Hom}_{G,\sigma,\rho}(W, V)$.

En otras palabras, si φ es un morfismo de representaciones y es un isomorfismo lineal, entonces es un isomorfismo de representaciones.

Demostración

Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es una transformación lineal invertible.

Demostración

Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G , tenemos que

$$\varphi^{-1}\sigma(g)$$

Demostración

Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G , tenemos que

$$\varphi^{-1}\sigma(g) =$$

Demostración

Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G , tenemos que

$$\varphi^{-1}\sigma(g) = \varphi^{-1}\sigma(g)\varphi\varphi^{-1}$$

Demostración

Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G , tenemos que

$$\varphi^{-1}\sigma(g) = \varphi^{-1}\sigma(g)\varphi\varphi^{-1} \underline{\underline{\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)}}$$

Demostración

Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G , tenemos que

$$\varphi^{-1}\sigma(g) = \varphi^{-1}\sigma(g)\varphi\varphi^{-1} \xrightarrow{\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)} \varphi^{-1}\varphi\rho(g)\varphi^{-1}$$

Demostración

Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G , tenemos que

$$\varphi^{-1}\sigma(g) = \varphi^{-1}\sigma(g)\varphi\varphi^{-1} \xrightarrow{\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)} \varphi^{-1}\varphi\rho(g)\varphi^{-1} =$$

Demostración

Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es una transformación lineal invertible.

Para cada g en G , tenemos que

$$\varphi^{-1}\sigma(g) = \varphi^{-1}\sigma(g)\varphi\varphi^{-1} \xrightarrow{\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W)} \varphi^{-1}\varphi\rho(g)\varphi^{-1} = \rho(g)\varphi^{-1}.$$

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V .

Se dice que W es un subespacio **invariante** o **estable** respecto ρ , si

$$\forall g \in G \quad \forall w \in W \quad \rho(g)w \in W.$$

Subespacio invariante (estable) de una representación

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación y sea W un subespacio de V .

Se dice que W es un subespacio **invariante** o **estable** respecto ρ , si

$$\forall g \in G \quad \forall w \in W \quad \rho(g)w \in W.$$

También se dice que W es un ρ -subespacio de V (o G -subespacio de V).

Teorema de Maschke (repaso breve)

Teorema

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es un morfismo y W es un ρ -subespacio de V , entonces existe un ρ -subespacio U de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Teorema de Maschke (repaso breve)

Teorema

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es un morfismo y W es un ρ -subespacio de V , entonces existe un ρ -subespacio U de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Si, además, suponemos que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$, entonces ρ es isomorfa a la suma directa de sus restricciones:

$$\rho \cong \rho^W \oplus \rho^U.$$

Proyección sobre un subespacio ρ -invariante

Proposición

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea W un ρ -subespacio de V .
Entonces, existe $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ e $\mathrm{im}(P) = W$.

Proyección sobre un subespacio ρ -invariante

Proposición

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea W un ρ -subespacio de V .
Entonces, existe $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ e $\mathrm{im}(P) = W$.

Primera demostración: está contenida en la demostración del teorema de Maschke.

Proyección sobre un subespacio ρ -invariante

Proposición

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea W un ρ -subespacio de V .
Entonces, existe $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ e $\mathrm{im}(P) = W$.

Primera demostración: está contenida en la demostración del teorema de Maschke.

Segunda demostración: usaremos solamente el resultado del teorema de Maschke.

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y $\ker(P) = U$.

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y $\ker(P) = U$.

Si $v \in V$, entonces

$$v = w + u, \quad w := Pv, \quad u := (I - P)v.$$

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y $\ker(P) = U$.

Si $v \in V$, entonces

$$v = w + u, \quad w := Pv, \quad u := (I - P)v.$$

Luego, para cada g en G ,

$$P\rho(g)v$$

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y $\ker(P) = U$.

Si $v \in V$, entonces

$$v = w + u, \quad w := Pv, \quad u := (I - P)v.$$

Luego, para cada g en G ,

$$P\rho(g)v =$$

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y $\ker(P) = U$.

Si $v \in V$, entonces

$$v = w + u, \quad w := Pv, \quad u := (I - P)v.$$

Luego, para cada g en G ,

$$P\rho(g)v = P(\underbrace{\rho(g)w}_{\in W}) + P(\underbrace{\rho(g)u}_{\in U})$$

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y $\ker(P) = U$.

Si $v \in V$, entonces

$$v = w + u, \quad w := Pv, \quad u := (I - P)v.$$

Luego, para cada g en G ,

$$P\rho(g)v = P\underbrace{(\rho(g)w)}_{\in W} + P\underbrace{(\rho(g)u)}_{\in U} =$$

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y $\ker(P) = U$.

Si $v \in V$, entonces

$$v = w + u, \quad w := Pv, \quad u := (I - P)v.$$

Luego, para cada g en G ,

$$P\rho(g)v = P\underbrace{(\rho(g)w)}_{\in W} + P\underbrace{(\rho(g)u)}_{\in U} = \rho(g)w$$

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y $\ker(P) = U$.

Si $v \in V$, entonces

$$v = w + u, \quad w := Pv, \quad u := (I - P)v.$$

Luego, para cada g en G ,

$$P\rho(g)v = P(\underbrace{\rho(g)w}_{\in W}) + P(\underbrace{\rho(g)u}_{\in U}) = \rho(g)w =$$

Segunda demostración

Sea U un ρ -subespacio de V tal que $V = W \dot{+} U$.

Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $\text{im}(P) = W$ y $\ker(P) = U$.

Si $v \in V$, entonces

$$v = w + u, \quad w := Pv, \quad u := (I - P)v.$$

Luego, para cada g en G ,

$$P\rho(g)v = P\underbrace{(\rho(g)w)}_{\in W} + P\underbrace{(\rho(g)u)}_{\in U} = \rho(g)w = \rho(g)Pv.$$

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ se llama irreducible si $V \neq \{0_V\}$ y no existe ρ -subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ se llama irreducible si $V \neq \{0_V\}$ y no existe ρ -subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}$ es una representación y S es un ρ -subespacio de V tal que $S \neq \{0_V\}$, se dice que S es irreducible si ρ^S es irreducible.

Representaciones irreducibles

Una representación $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ se llama irreducible si $V \neq \{0_V\}$ y no existe ρ -subespacio W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}$ es una representación y S es un ρ -subespacio de V tal que $S \neq \{0_V\}$, se dice que S es irreducible si ρ^S es irreducible.

En otras palabras,

S es irreducible si no existe ρ -subespacio W de S tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq S$.

- 1 Definiciones básicas
- 2 El núcleo y la imagen de un morfismo
- 3 Lema de Schur
- 4 Corolario: estructura de morfismos entre dos representaciones irreducibles
- 5 Corolario: representaciones irreducibles de grupos conmutativos
- 6 Ejemplos

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\ker(\varphi)$ es un subespacio ρ -invariante de V .

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\ker(\varphi)$ es un subespacio ρ -invariante de V .

Demostración. Si $v \in \ker(\varphi)$ y $g \in G$, entonces

$$\varphi(\rho(g)v)$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\ker(\varphi)$ es un subespacio ρ -invariante de V .

Demostración. Si $v \in \ker(\varphi)$ y $g \in G$, entonces

$$\varphi(\rho(g)v) =$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\ker(\varphi)$ es un subespacio ρ -invariante de V .

Demostración. Si $v \in \ker(\varphi)$ y $g \in G$, entonces

$$\varphi(\rho(g)v) = \sigma(g)\varphi v$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\ker(\varphi)$ es un subespacio ρ -invariante de V .

Demostración. Si $v \in \ker(\varphi)$ y $g \in G$, entonces

$$\varphi(\rho(g)v) = \sigma(g)\varphi v =$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\ker(\varphi)$ es un subespacio ρ -invariante de V .

Demostración. Si $v \in \ker(\varphi)$ y $g \in G$, entonces

$$\varphi(\rho(g)v) = \sigma(g)\varphi v = \sigma(g)0_W = 0_W,$$

El núcleo de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\ker(\varphi)$ es un subespacio ρ -invariante de V .

Demostración. Si $v \in \ker(\varphi)$ y $g \in G$, entonces

$$\varphi(\rho(g)v) = \sigma(g)\varphi v = \sigma(g)0_W = 0_W,$$

así que $\rho(g)v \in \ker(\varphi)$.

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\text{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Demostración.

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, entonces $\text{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Demostración.

Sea $w \in \text{im}(\varphi)$. Elegimos v en V tal que $w = \varphi v$.

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\text{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Demostración.

Sea $w \in \text{im}(\varphi)$. Elegimos v en V tal que $w = \varphi v$.

Luego, para cada g en G ,

$$\sigma(g)w$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, entonces $\text{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Demostración.

Sea $w \in \text{im}(\varphi)$. Elegimos v en V tal que $w = \varphi v$.

Luego, para cada g en G ,

$$\sigma(g)w =$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, entonces $\text{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Demostración.

Sea $w \in \text{im}(\varphi)$. Elegimos v en V tal que $w = \varphi v$.

Luego, para cada g en G ,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)\varphi v$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, entonces $\text{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Demostración.

Sea $w \in \text{im}(\varphi)$. Elegimos v en V tal que $w = \varphi v$.

Luego, para cada g en G ,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)\varphi v =$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\text{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Demostración.

Sea $w \in \text{im}(\varphi)$. Elegimos v en V tal que $w = \varphi v$.

Luego, para cada g en G ,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)\varphi v = \varphi(\rho(g)v)$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\text{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Demostración.

Sea $w \in \text{im}(\varphi)$. Elegimos v en V tal que $w = \varphi v$.

Luego, para cada g en G ,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)\varphi v = \varphi(\rho(g)v) \in$$

La imagen de un morfismo de representaciones es un subespacio invariante

Proposición

Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ son representaciones de un grupo G y $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$, entonces $\text{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Demostración.

Sea $w \in \text{im}(\varphi)$. Elegimos v en V tal que $w = \varphi v$.

Luego, para cada g en G ,

$$\sigma(g)w = \sigma(g)\varphi v = \varphi(\rho(g)v) \in \text{im}(\varphi).$$

- 1 Definiciones básicas
- 2 El núcleo y la imagen de un morfismo
- 3 Lema de Schur**
- 4 Corolario: estructura de morfismos entre dos representaciones irreducibles
- 5 Corolario: representaciones irreducibles de grupos conmutativos
- 6 Ejemplos

Lema de Schur

El “Lema de Schur” consiste de los siguientes dos teoremas importantes.

Teorema (lema de Schur para homomorfismos de representaciones irreducibles)

Sean $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ representaciones irreducibles y sea $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$.

Entonces, φ es un isomorfismo o φ es cero.

Teorema (lema de Schur para automorfismos de representaciones irreducibles)

Una representación $\rho: G \rightarrow GL(V)$ es irreducible $\iff \mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I_V$.

Lema de Schur para homomorfismos de representaciones irreducibles

Teorema

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones irreducibles y sea $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$.

Entonces, φ es un isomorfismo o φ es cero.

Lema de Schur para homomorfismos de representaciones irreducibles

Teorema

Sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones irreducibles y sea $\varphi \in \text{Hom}_{G, \rho, \sigma}(V, W)$.

Entonces, φ es un isomorfismo o φ es cero.

Otra forma lógica: si φ no es cero, entonces φ es un isomorfismo.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible,

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ o $\ker(\varphi) = V$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ o $\ker(\varphi) = V$.

Como σ es irreducible,

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ o $\ker(\varphi) = V$.

Como σ es irreducible, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ o $\operatorname{im}(\varphi) = W$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ o $\ker(\varphi) = V$.

Como σ es irreducible, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ o $\operatorname{im}(\varphi) = W$.

Caso I. $\ker(\varphi) = V$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ o $\ker(\varphi) = V$.

Como σ es irreducible, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ o $\operatorname{im}(\varphi) = W$.

Caso I. $\ker(\varphi) = V$.

En este caso, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ y φ es cero.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ o $\ker(\varphi) = V$.

Como σ es irreducible, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ o $\operatorname{im}(\varphi) = W$.

Caso I. $\ker(\varphi) = V$.

En este caso, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ y φ es cero.

Caso II. $\ker(\varphi) = \{0_V\}$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ o $\ker(\varphi) = V$.

Como σ es irreducible, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ o $\operatorname{im}(\varphi) = W$.

Caso I. $\ker(\varphi) = V$.

En este caso, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ y φ es cero.

Caso II. $\ker(\varphi) = \{0_V\}$.

Como $\ker(\varphi) \neq V$, tenemos que

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ o $\ker(\varphi) = V$.

Como σ es irreducible, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ o $\operatorname{im}(\varphi) = W$.

Caso I. $\ker(\varphi) = V$.

En este caso, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ y φ es cero.

Caso II. $\ker(\varphi) = \{0_V\}$.

Como $\ker(\varphi) \neq V$, tenemos que $\operatorname{im}(\varphi) \neq \{0_W\}$.

Demostración

Ya sabemos que $\ker(\varphi)$ es un ρ -subespacio de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ es un σ -subespacio de W .

Además, $V \neq \{0_V\}$ y $W \neq \{0_W\}$.

Como ρ es irreducible, $\ker(\varphi) = \{0_V\}$ o $\ker(\varphi) = V$.

Como σ es irreducible, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ o $\operatorname{im}(\varphi) = W$.

Caso I. $\ker(\varphi) = V$.

En este caso, $\operatorname{im}(\varphi) = \{0_W\}$ y φ es cero.

Caso II. $\ker(\varphi) = \{0_V\}$.

Como $\ker(\varphi) \neq V$, tenemos que $\operatorname{im}(\varphi) \neq \{0_W\}$.

Luego $\operatorname{im}(\varphi) = W$.

Lema de Schur para automorfismos de representaciones irreducibles

Teorema

Una representación $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ es irreducible $\iff \mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I_V$.

En forma más detallada, $\mathbb{C}I_V$ es el álgebra de todos los operadores escalares:

$$\mathbb{C}I := \{\lambda I: \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo,

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ es un valor propio de φ ,

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ es un valor propio de φ , esto es, $\lambda I - \varphi$ no es un isomorfismo.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ es un valor propio de φ , esto es, $\lambda I - \varphi$ no es un isomorfismo.

Por el lema de Schur (primera parte), $\lambda I - \varphi = 0$.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que ρ es irreducible.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ y V es un espacio vectorial complejo, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ es un valor propio de φ , esto es, $\lambda I - \varphi$ no es un isomorfismo.

Por el lema de Schur (primera parte), $\lambda I - \varphi = 0$.

Luego $\varphi = \lambda I$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ -subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ -subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\text{im}(P) = W$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ -subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\text{im}(P) = W$.

Por la suposición, $P = \lambda I$ para algún λ en $\mathbb{C}$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ -subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\text{im}(P) = W$.

Por la suposición, $P = \lambda I$ para algún λ en $\mathbb{C}$.

Notamos que $\lambda^2 I = P^2 = P = \lambda I$, de donde $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ -subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\text{im}(P) = W$.

Por la suposición, $P = \lambda I$ para algún λ en $\mathbb{C}$.

Notamos que $\lambda^2 I = P^2 = P = \lambda I$, de donde $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

Si $\lambda = 0$, entonces $P = 0_{\mathcal{L}(V)}$ e $W = \text{im}(P) = \{0_V\}$. Contradicción.

Demostración, $\Leftarrow$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I$, pero ρ no es irreducible.

Sea W un ρ -subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$ y $W \neq V$.

Sea $P \in \mathcal{C}(\rho)$ tal que $P^2 = P$ y $\text{im}(P) = W$.

Por la suposición, $P = \lambda I$ para algún λ en $\mathbb{C}$.

Notamos que $\lambda^2 I = P^2 = P = \lambda I$, de donde $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

Si $\lambda = 0$, entonces $P = 0_{\mathcal{L}(V)}$ e $W = \text{im}(P) = \{0_V\}$. Contradicción.

Si $\lambda = 1$, entonces $P = I$ e $W = \text{im}(P) = V$. Contradicción.

- 1 Definiciones básicas
- 2 El núcleo y la imagen de un morfismo
- 3 Lema de Schur
- 4 Corolario: estructura de morfismos entre dos representaciones irreducibles
- 5 Corolario: representaciones irreducibles de grupos conmutativos
- 6 Ejemplos

El espacio de morfismos entre dos representaciones irreducibles

Proposición

Sean $\rho: G \rightarrow GL(V)$ y $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ representaciones irreducibles.

- I. Si existe un isomorfismo entre ρ y σ , entonces $\dim(\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)) = 1$.
- II. Si no existe un isomorfismo entre ρ y σ , entonces $\dim(\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)) = 0$.

Demostración

I. Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es invertible.

Para cada ψ en $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, tenemos que

$$\varphi^{-1}\psi \in \text{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Demostración

I. Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es invertible.

Para cada ψ en $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, tenemos que

$$\varphi^{-1}\psi \in \text{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Por la segunda parte del lema de Schur,

Demostración

I. Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es invertible.

Para cada ψ en $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, tenemos que

$$\varphi^{-1}\psi \in \text{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $\varphi^{-1}\psi = \lambda I_V$.

Demostración

I. Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es invertible.

Para cada ψ en $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, tenemos que

$$\varphi^{-1}\psi \in \text{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $\varphi^{-1}\psi = \lambda I_V$.

Concluimos que $\psi = \lambda\varphi$.

Demostración

I. Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es invertible.

Para cada ψ en $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, tenemos que

$$\varphi^{-1}\psi \in \text{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $\varphi^{-1}\psi = \lambda I_V$.

Concluimos que $\psi = \lambda\varphi$.

II. Supongamos que todos los elementos de $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ no son invertibles.

Demostración

I. Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es invertible.

Para cada ψ en $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, tenemos que

$$\varphi^{-1}\psi \in \text{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $\varphi^{-1}\psi = \lambda I_V$.

Concluimos que $\psi = \lambda\varphi$.

II. Supongamos que todos los elementos de $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ no son invertibles.

Entonces, por la primera parte del lema de Schur,

Demostración

I. Supongamos que $\varphi \in \text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ y φ es invertible.

Para cada ψ en $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$, tenemos que

$$\varphi^{-1}\psi \in \text{End}_{G,\rho}(V) = \mathcal{C}(\rho).$$

Por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $\varphi^{-1}\psi = \lambda I_V$.

Concluimos que $\psi = \lambda\varphi$.

II. Supongamos que todos los elementos de $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ no son invertibles.

Entonces, por la primera parte del lema de Schur,

cada elemento de $\text{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$ es la transformación cero.

Corolario: sobre el promedio de un operador lineal

Corolario

Sean G un grupo finito, V un espacio vectorial complejo de dimensión n , $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación irreducible del grupo G y $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.

Definimos $\psi: V \rightarrow V$,

$$\psi := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \varphi \rho(g).$$

Entonces,

$$\psi = \frac{\text{tr}(\varphi)}{n} I.$$

Demostración

$$\psi := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \varphi \rho(g).$$

Demostración

$$\psi := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \varphi \rho(g).$$

Ya sabemos que $\psi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Demostración

$$\psi := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \varphi \rho(g).$$

Ya sabemos que $\psi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como ρ es irreducible, por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\psi = \lambda I.$$

Demostración

$$\psi := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \varphi \rho(g).$$

Ya sabemos que $\psi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como ρ es irreducible, por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\psi = \lambda I.$$

Aplicamos tr a ambos lados. Como $\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(A)$, obtenemos que

Demostración

$$\psi := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \varphi \rho(g).$$

Ya sabemos que $\psi \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como ρ es irreducible, por la segunda parte del lema de Schur, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\psi = \lambda I.$$

Aplicamos tr a ambos lados. Como $\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(A)$, obtenemos que

$$\text{tr}(\varphi) = \lambda n.$$

- 1 Definiciones básicas
- 2 El núcleo y la imagen de un morfismo
- 3 Lema de Schur
- 4 Corolario: estructura de morfismos entre dos representaciones irreducibles
- 5 Corolario: representaciones irreducibles de grupos conmutativos
- 6 Ejemplos

Representaciones irreducibles de grupos conmutativos

Teorema

Si G es un grupo finito conmutativo,
 V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita
y $\rho: G \rightarrow GL(V)$ es una representación irreducible,
entonces $\dim(V) = 1$.

Demostración, inicio

1. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h)$$

Demostración, inicio

1. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) =$$

Demostración, inicio

1. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$$

Demostración, inicio

1. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) =$$

Demostración, inicio

1. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg)$$

Demostración, inicio

1. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) =$$

Demostración, inicio

1. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Demostración, inicio

1. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Esto significa que

Demostración, inicio

1. Como G es conmutativo, para cada g, h en G tenemos que

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g).$$

Esto significa que

$$\{\rho(g): g \in G\} \subseteq \mathcal{C}(\rho).$$

2. Como ρ es irreducible, por la segunda parte del lema de Schur concluimos que

$$\forall g \in G \quad \exists \lambda_g \in \mathbb{C} \quad \rho(g) = \lambda_g I.$$

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$.

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$. Luego

$$\rho(g)(\xi u)$$

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$. Luego

$$\rho(g)(\xi u) =$$

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$. Luego

$$\rho(g)(\xi u) = \xi \rho(g)u$$

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$. Luego

$$\rho(g)(\xi u) = \xi \rho(g)u =$$

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$. Luego

$$\rho(g)(\xi u) = \xi \rho(g)u = \xi \lambda_g u$$

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$. Luego

$$\rho(g)(\xi u) = \xi \rho(g)u = \xi \lambda_g u \in$$

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$. Luego

$$\rho(g)(\xi u) = \xi \rho(g)u = \xi \lambda_g u \in W.$$

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$. Luego

$$\rho(g)(\xi u) = \xi \rho(g)u = \xi \lambda_g u \in W.$$

4. Como $\mathbb{C}u$ es ρ -invariante, $\mathbb{C}u \neq \{0_V\}$ y ρ es irreducible,

Demostración, final

3. Fijemos $u \in V$, $u \neq 0_V$. Consideremos el subespacio generado por u :

$$W := \mathbb{C}u, \quad \text{es decir,} \quad W = \{\xi u : \xi \in \mathbb{C}\}.$$

Mostremos que W es ρ -invariante.

Dado v en W , encontramos ξ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \xi u$. Luego

$$\rho(g)(\xi u) = \xi \rho(g)u = \xi \lambda_g u \in W.$$

4. Como $\mathbb{C}u$ es ρ -invariante, $\mathbb{C}u \neq \{0_V\}$ y ρ es irreducible,

$$V = \mathbb{C}u.$$

- 1 Definiciones básicas
- 2 El núcleo y la imagen de un morfismo
- 3 Lema de Schur
- 4 Corolario: estructura de morfismos entre dos representaciones irreducibles
- 5 Corolario: representaciones irreducibles de grupos conmutativos
- 6 Ejemplos

Ejemplo 1

$G = S_3$. Denotamos sus elementos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e = a^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & a &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & a^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ b &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & ab &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & a^2b &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que en este ejemplo $a^3 = e$, $b^2 = e$.

Ejemplo 1

Sea $\varepsilon_3 := \exp \frac{2\pi i}{3}$.

Ejemplo 1

Sea $\varepsilon_3 := \exp \frac{2\pi i}{3}$.

Definimos $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$,

$$\rho(a^k) = \begin{bmatrix} \varepsilon_3^k & 0 \\ 0 & \varepsilon_3^{-k} \end{bmatrix}, \quad \rho(a^k b) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_3^k \\ \varepsilon_3^{-k} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: demostrar que ρ es una representación.

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \implies$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \implies X_{1,1} = X_{2,2}, \quad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \implies X_{1,1} = X_{2,2}, \quad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \implies X_{1,1} = X_{2,2}, \quad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \implies$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \implies X_{1,1} = X_{2,2}, \quad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \implies X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \implies X_{1,1} = X_{2,2}, \quad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \implies X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

$$X = X_{1,1}I_2.$$

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \implies X_{1,1} = X_{2,2}, \quad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \implies X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

$X = X_{1,1}I_2$. Luego $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I_2$.

Ejemplo 1

Calculemos el centralizador de ρ . Sea $X \in \mathcal{C}(\rho)$.

Consideramos la igualdad $\rho(b)X = X\rho(b)$:

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{1,1} & X_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,2} & X_{1,1} \\ X_{2,2} & X_{2,1} \end{bmatrix} \implies X_{1,1} = X_{2,2}, \quad X_{2,1} = X_{1,2}.$$

Consideramos la igualdad $\rho(a)X = X\rho(a)$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3 X_{1,2} \\ \varepsilon_3^{-1} X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 X_{1,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{1,2} \\ \varepsilon_3 X_{2,1} & \varepsilon_3^{-1} X_{2,2} \end{bmatrix} \implies X_{1,2} = X_{2,1} = 0.$$

$X = X_{1,1}I_2$. Luego $\mathcal{C}(\rho) = \mathbb{C}I_2$. Por lo tanto, ρ es irreducible.

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 =$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 =$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Como el grupo G es conmutativo y $\dim(V) = 2$, concluimos que

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Como el grupo G es conmutativo y $\dim(V) = 2$, concluimos que ρ es reducible (tiene un subespacio invariante de dimensión 1).

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz A y sus potencias:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Sean $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}^2$. Definimos $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$,

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k.$$

Como el grupo G es conmutativo y $\dim(V) = 2$, concluimos que ρ es reducible (tiene un subespacio invariante de dimensión 1).

Ejercicio: encontrar un vector propio de A , encontrar un subespacio invariante de ρ .