

Funciones uniformemente continuas

1. Escriba la definición de una función uniformemente continua.
2. ¿Cuál es la relación entre funciones continuas y uniformemente continuas en un intervalo cerrado?
3. Demuestre que la función $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.
4. Demuestre que la función $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en $[0, +\infty)$.
5. Sea $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demuestre que f tiene un límite finito en el punto 1 y por lo tanto se puede extender hasta una función continua $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Funciones Lipschitz continuas

6. Escriba la definición de una función Lipschitz continua.
7. Demuestre que una función Lipschitz continua en un intervalo finito es acotada.
8. Demuestre que la suma y el producto de dos funciones Lipschitz continuas en un intervalo finito también son Lipschitz continuas.
9. Demuestre que toda función Lipschitz continua es uniformemente continua.
10. Demuestre que la función $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$, no es Lipschitz continua.