Convergencia uniforme

Definición (convergencia uniforme de una sucesión de funciones). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{C}$ y sea g una función $X \to \mathbb{C}$. Se dice que f_n *converge uniformemente a* g si

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\| = 0.$$

1. Formular la definición anterior en el lenguaje de ε y N. Comparar con la definición de convergencia puntual.

2. Teorema de Dini. Sea X un compacto y sean $f_n, g \in C(X, \mathbb{R})$. Supóngase que para todo $x \in X$ la sucesión $f_n(x)$ es monótona y para todo $x \in X$ se tiene $f_n(x) \to g(x)$ cuando $n \to \infty$. Entonces $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$.

3. Esquema de investigación. Para considerar los siguientes ejemplos, se puede usar el siguiente esquema:

- calcular la función límite $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$;
- calcular la norma $\|f_n - g\|$;
- checar si $\|f_n - g\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

A veces es suficiente obtener una estimación superior de $\|f_n - g\|$ (para demostrar que $\|f_n - g\| \to 0$) o una estimación inferior (para demostar que $\|f_n - g\| \not\to 0$).

Para las siguientes sucesiones de funciones hay que calcular la función límite y checar si tiene lugar la convergencia uniforme.

4. $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ es la función lineal a trozos cuya gráfica une los puntos $(0, 0)$, $(1/n, 1)$, $(2/n, 0)$, $(1, 0)$.

5. $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x - x^n.$

6. $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$

7. $f_n\colon \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$

8. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}.$

9. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}.$

10. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}.$

11. $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}.$

12. $f_n\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}.$

13. $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - x^{n+1}.$

14. $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right).$

15. $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}.$

16. $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}.$

17. $f_n\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}.$

18. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}.$

19. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{(x-n)^2+9}.$

20. $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \operatorname{arc\,tg} nx.$

21. $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x \operatorname{arc\,tg} nx.$