Notación de Landau “*o* pequeña” para sucesiones

Definición. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la clase $o(a_n)$ consiste en todas las sucesiones $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

En vez de escribir $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in o\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ por lo común se escribe $b_n = o(a_n)$.

Ejemplo. $n \in o(n^2)$.

1. Demuestre que $\sqrt{n} \in o(n)$.

2. Demuestre que $2^n \in o(5^n)$.

3. Sea $a > 1$. Usando la desigualdad de Bernoulli demuestre que $n \in o(a^n)$.

4. Usando la desigualdad de Bernoulli demuestre que $n^3 \in o(2^n)$.

5. Demuestre que $\log_2(n) \in o(n)$.

6. Demuestre que $5^n \in o(n!)$.

Propiedades de la notación “*o* pequeña”

7. Sea $b_n \in o(a_n)$ y sea $c_n \in o(b_n)$. Demuestre que $c_n = o(a_n)$.

8. Compare las sucesiones n, n^2, n^3, 2^n, 3^n, $n!$, $\sqrt{n}$, $\log_2(n)$ usando la notación o.

9. Sea $b_n \in o(a_n)$ y sea $c_n \in o(a_n)$. Demuestre que $b_n + c_n \in o(a_n)$.

10. Sea $b_n \in o(a_n)$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que $cb_n \in o(a_n)$.