Demostración de desigualdades usando derivadas

Objetivos. Conocer ejemplos de demostraciones de desigualdades con ayuda de la derivada.

Requisitos. Criterio de la función creciente y decreciente en términos de la derivada, teorema del valor medio.

Criterio de la función creciente. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función derivable en X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es creciente (en el sentido inestricto), esto es, $f(x_1) \le f(x_2)$ para toda $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \le x_2$.

(b) $f'(x) \ge 0$ para todo $x \in X$.

Nota: en los puntos extremos del intervalo X se trata de la derivada lateral.

Demostración de la desigualdad $|\operatorname{sen}(x)| \le |x|$

Ejemplo. Demuestre que
$$\forall x \ge 0 \qquad \operatorname{sen}(x) \le x.$$

Solución. Consideremos la función
$$f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \coloneqq x - \operatorname{sen}(x).$$

Notemos que su derivada siempre es no negativa:
$$f'(x) = 1 - \cos(x) \ge 0 \qquad \forall x \ge 0.$$

Por lo tanto f es creciente en $[0, +\infty)$, y si $x \ge 0$, entonces
$$f(x) \ge f(0) = 0 - \operatorname{sen}(0) = 0. \qquad \square$$

1. Demuestre que
$$\forall x \ge 0 \qquad \operatorname{sen}(x) \ge -x.$$

2. Usando los resultados de los ejercicios anteriores y propiedades del valor absoluto concluya que
$$\forall x \ge 0 \qquad \big|\operatorname{sen}(x)\big| \le x.$$

3. Usando el hecho que la función sen es impar y el resultado del ejercicio anterior demuestre que
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \big|\operatorname{sen}(x)\big| \le |x|.$$

Otras desigualdades con funciones trigonométricas

4. Demuestre que

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. Demuestre que

$$x \leq \operatorname{tg}(x) \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

6. Demuestre que

$$\operatorname{sen}(x) \geq \frac{2}{\pi}\, x \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Indicación: considere la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7. Demuestre que

$$\operatorname{tg}(x) \leq \frac{4}{\pi}\, x \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Desigualdades con exp y log

8. Demuestre que

$$e^x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

9. Demuestre que

$$\ln(1 + x) \leq x \qquad \forall x \geq 0.$$