Propiedades de límites de sucesiones

1. Definición del límite de una sucesión (repaso). Escriba la definición del límite de una sucesión.

Límites y desigualdades

En los siguientes ejercicios se supone que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesiones de números reales.

2. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$. Demuestre que

$$\exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq m \qquad a_n < 5.$$

3. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ donde $b \in \mathbb{R}$ y sea $c > b$. Demuestre que

$$\exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq m \qquad a_n < c.$$

4. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ donde $b \in \mathbb{R}$ y sea $c < b$. Demuestre que

$$\exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq m \qquad a_n > c.$$

5. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ donde $b \in \mathbb{R}$. Demuestre que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

6. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ donde $b \in \mathbb{R}$ y $|b| \neq 0$. Demuestre que

$$\exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad |a_n| \geq \frac{|b|}{2}.$$

7. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ donde $b \in \mathbb{R}$ y $|b| \neq 0$. Demuestre que la sucesión $\dfrac{1}{a_n}$ está bien definida y acotada a partir de cierto n, esto es, existe un $k \in \mathbb{N}$ y un $M > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$ se tiene que $a_n \neq 0$ y $\dfrac{1}{|a_n|} \leq M$.

8. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ donde $b \in \mathbb{R}$ y sea c un número real tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $a_n \geq c$. Demuestre que $b \geq c$.

9. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ donde $b \in \mathbb{R}$ y sea c un número real tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $a_n \leq c$. Demuestre que $b \leq c$.

10. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supóngase que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = d$ donde $d \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.
Nota: en particular, hay que demostrar que el último límite existe.

Propiedades aritméticas

En los siguientes ejercicios se supone que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales que tienen límites finitos c y d respectivamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = d \in \mathbb{R}.$$

11. Límite de la suma. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = c + d.$$

12. Límite de la diferencia. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = c - d.$$

13. Límite del producto de una sucesión por un escalar, caso particular. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} (7a_n) = 7c.$$

14. Límite del producto de una sucesión por un escalar, otro caso particular. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} (-5a_n) = -5c.$$

15. Límite del producto de una sucesión por un escalar. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda c.$$

16. Límite del producto. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = cd.$$

17. Límite del cociente. Sea $d \neq 0$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{d}.$$