Límites infinitos de funciones

Para definir límites infinitos y límites cuando el argumento tiende a infinito vamos a definir primero las vecindades (o más precisamente *vecindades básicas*) de los "puntos infinitos".

Definición (vecindades de un punto finito). Vecindades de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ son intervalos de la forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ donde $\varepsilon > 0$.

Definición (vecindades de $+\infty$, $-\infty$ e ∞).

- Vecindades de $+\infty$ son intervalos de la forma $(E, +\infty)$ donde $E > 0$.
- Vecindades de $-\infty$ son intervalos de la forma $(-\infty, -E)$ donde $E > 0$.
- Vecindades de ∞ son conjuntos de la forma $(-\infty, -E) \cup (E, +\infty)$ donde $E > 0$.

Observación. El conjunto $(-\infty, E) \cup (E, +\infty)$ se puede escribir como $\{x \in \mathbb{R} \colon |x| > E\}$.

Definición del límite escrita en lenguaje de vecindades. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, sea $f \colon X \to \mathbb{R}$ una función, sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$ un punto de acumulación del conjunto X y sea $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$. Se dice que $f(x)$ *tiende* a b cuando x tiende al punto a y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = b$ si para toda vecindad W de b existe una vecindad U de a tal que para todo $x \in U \cap X$ se cumple que $f(x) \in W$.

Definición (función tiende a más infinito). Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, sea $f \colon X \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación del conjunto X. Se dice que $f(x)$ *tiende a más infinito* cuando x tiende al punto a y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \quad f(x) > E.$$

1. Escriba la definición de que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

2. Escriba la definición de que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Ejemplo. Demostrar que $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

Solución. Notemos que el dominio de la función ln es $D(\ln) = (0, +\infty)$. Sea $E > 0$. Vamos a demostrar que $\ln(x) < -E$ para todo $x > 0$ que está bastante cerca del punto 0. Usando el hecho que la función ln es estrictamente creciente y su infersa es exp, resolvemos la desigualdad $\ln(x) < -E$:

$$\ln(x) < -E \qquad \iff \qquad 0 < x < e^{-E}.$$

Respuesta: $\delta \coloneqq \dfrac{1}{e^E}$. □

3. Demuestre que $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

Ejemplo. Demostrar que $\quad \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2}{x+4} = \infty.$

Solución. Pongamos $f(x) \coloneqq \dfrac{x^2}{x+4}$. El dominio de f es $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Sea $E > 0$. Mostremos que $|f(x)| > E$ para todo $x \in D(f)$ que está bastante cerca del punto -4. Notemos que

$$\left|\frac{x^2}{x+4}\right| = \frac{x^2}{|x+4|} \overset{\text{(i)}}{\geq} \frac{9}{|x+4|} \overset{\text{(ii)}}{\geq} E.$$

Para cumplir la cadena de las desigualdades pedimos dos condiciones:

(i) $|x+4| < 1$. Esta condición garantiza que $-1 < x+4 < 1$, $-5 < x < -3$, $x^2 > 3$.

(ii) $|x+4| < \frac{9}{E}$. Si se cumple esta condición y $x \neq -4$, entonces $\dfrac{9}{|x+4|} > E$.

Pongamos

$$\delta \coloneqq \min\left\{1, \frac{9}{E}\right\}.$$

Si $x \neq -4$ y $|x+4| < \delta$, entonces se cumplen (i), (ii) y por lo tanto $|f(x)| > E$. $\square$

4. Demuestre que $\quad \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{x-3} = \infty.$

5. Demuestre que $\quad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x-2} = \infty.$

6. Demuestre que $\quad \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+4}{(x+2)^2} = +\infty.$

7. Demuestre que $\quad \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2-x}{(x-5)^2} = -\infty.$