Funciones. Imágenes y preimágenes

Ejemplos

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$. Dibuje la gráfica de f y halle las siguientes imágenes y preimágenes:

- $f([2,3]), \quad f([-1,1])$;
- $f^{-1}([2,4]), \quad f^{-1}([-1,1]), \quad f^{-1}([1/2,3]), \quad f^{-1}([-3,-2]), \quad f^{-1}([-3,1])$.

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Dibuje la gráfica de f y halle las siguientes imágenes y preimágenes:

- $f([1,2]), \quad f([-2,1])$;
- $f^{-1}([3,9]), \quad f^{-1}([1/3,2]), \quad f^{-1}([-2,0]), \quad f^{-1}([-2,3])$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dibuje la gráfica de f y halle las siguientes imágenes y preimágenes:

- $f([1,2]), \quad f([-2,-1]), \quad f([-1,3])$;
- $f^{-1}([4,9]), \quad f^{-1}([-2,-1]), \quad f^{-1}([-2,1])$.

Imágenes, preimágenes, uniones e intersecciones

4. Preimagen de la unión, preimagen de la intersección. Demuestre que

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D);$$
$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

5. Imagen de la unión. Demuestre que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

6. Imagen de la intersección. Demuestre que

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Construya un ejemplo tal que

$$f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B).$$

Cibstruya un ejemplo tal que

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Imagen de la preimagen, preimagen de la imagen

7. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $A \subseteq X$. Compare los conjuntos A y $f^{-1}(f(A))$.

8. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $B \subseteq Y$. Compare los conjuntos B y $f(f^{-1}(B))$.

Monotonicidad de imágenes y preimágenes

9. Sea $f\colon X \to Y$ y sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$. Demuestre que

$$f(A) \subseteq f(B).$$

10. Sea $f\colon X \to Y$ y sean $C, D \subseteq Y$ tales que $C \subseteq D$. Demuestre que

$$f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D).$$

Imágenes y preimágenes, conjuntos vacíos y no vacíos

11. Imagen del conjunto vacío, imagen de un conjunto no vacío. Demustre que

$$f(\varnothing) = \varnothing.$$

Sea $A \neq \varnothing$ un subconjunto del dominio de f. Demuestre que

$$f(A) \neq \varnothing.$$

12. Preimagen del conjunto vacío, preimagen de un conjunto no vacío. Demuestre que

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing.$$

Dé un ejemplo de una función $f\colon X \to Y$ y un conjunto no vacío $B \subseteq Y$ tales que

$$f^{-1}(B) = \varnothing.$$