Engrape aquí
No doble

Examen parcial II. Variante α.

Supremo e ínfimo, límites de funciones, continuidad de funciones, teoremas sobre funciones derivables, análisis de la variación de las funciones, fórmula de Taylor, convergencia uniforme, integral definida, integrales impropias y series, funciones de varias variables.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ____ Calificación: _________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.
Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B).$$

Problema 2.
Usando la definición del límite demuestre que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{(x-2)^2}=-\infty.$$

Problema 3.
Demuestre que la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(0,+\infty)$, pero no es uniformemente continua.

Problema 4.
Demuestre que la función $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ es Lipschitz continua en el intervalo $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Problema 5.
Dada la función $f(x)=(x-3)e^x$, encuentre su dominio y asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Dibuje su gráfica.

Problema 6.
Expanda la función f en las potencias de x hasta x^4:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+x}-1}.$$

Problema 7.
Dada la sucesión de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ calcule la función límite y determine si la convergencia es uniforme o no:

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \qquad X = [0, 1].$$

Problema 8.
Halle $(F^{-1})'(0)$ si

$$F(x) = \int_{\pi}^{x} \cos(\operatorname{sen}(t))\, dt.$$

Problema 9.
Para cada una de las siguientes series determine si esta es convergente o no:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+5)}.$$

Problema 10.
Dada la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2},$$

determine si existen o no los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right), \qquad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right), \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y).$$

Examen parcial II. Variante β.

Supremo e ínfimo, límites de funciones, continuidad de funciones,

teoremas sobre funciones derivables, análisis de la variación de las funciones,

fórmula de Taylor, convergencia uniforme, integral definida,

integrales impropias y series, funciones de varias variables.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ____ Calificación: _________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.
Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números reales, esto es, $a_{n+1} \leqslant a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que su ínfimo

$$b \coloneqq \inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$$

es finito. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

Problema 2.
Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 0}\bigl(\cos(x)\bigr)^{\cot^2(3x)}.$$

Problema 3.
Sean $f, g \colon [0,1] \to [0,+\infty)$ funciones continuas que satisfacen la siguiente condición:

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$

Demuestre que existe $t \in [0,1]$ tal que $f(t)^2 - 7f(t) = g(t)^2 - 7g(t)$.

Problema 4.
Demuestre que para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se cumple la desigualdad

$$\operatorname{sen}(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x.$$

Problema 5.
Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, encuentre su dominio y asíntotas, intervalos de crecimento y decrecimiento, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Dibuje su gráfica.

Problema 6.
Expanda la función f en las potencias de x hasta x^5:

$$f(x) = \tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}.$$

Problema 7.
Dada la sucesión de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ calcule la función límite y determine si la convergencia es uniforme o no:

$$f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^2 + 16}, \qquad X = \mathbb{R}.$$

Problema 8.
Calcule la integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8(t)\, dt.$$

Problema 9.
Calcule las sumas de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Problema 10.
Calcule la matriz jacobiana y el diferencial de la función f en el punto $(1, 0)$:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(x^2+y^2) \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \end{pmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Examen parcial II. Variante γ.

Supremo e ínfimo, límites de funciones, continuidad de funciones, teoremas sobre funciones derivables, análisis de la variación de las funciones, fórmula de Taylor, convergencia uniforme, integral definida, integrales impropias y series, funciones de varias variables.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ____ Calificación: __________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de números reales, esto es, $a_{n+1} \geqslant a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que la sucesión no es acotada:

$$\sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Problema 2.

Usando la definición del límite demuestre que

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+5}{x-3} = -\infty.$$

Problema 3.

Demuestre que la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es discontinua en todo punto real.

Problema 4.

Demuestre que la función $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ es Lipschitz continua en $\mathbb{R}$.

Problema 5.

Dada la función $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$, encuentre su dominio y asíntotas, intervalos de crecimento y decrecimiento, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Dibuje su gráfica.

Problema 6.
Calcule el límite usando las expansiones de Taylor-Maclaurin:

$$f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2\operatorname{tg}(x)}{x + \operatorname{sen}(x)} \right)^{1/(1-\cos(x))}.$$

Problema 7.
Dada la sucesión de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ calcule la función límite y determine si la convergencia es uniforme o no:

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n + x}, \qquad X = [1, +\infty).$$

Problema 8.
Halle los máximos y mínimos locales de la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, dt.$$

Problema 9.
Para cada una de las siguientes integrales impropias determine si esta es convergente o no:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Problema 10.
Dada la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 - xy + y^2},$$

determine si existen o no los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right), \qquad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right), \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y).$$

Examen parcial II. Variante δ.

Supremo e ínfimo, límites de funciones, continuidad de funciones, teoremas sobre funciones derivables, análisis de la variación de las funciones, fórmula de Taylor, convergencia uniforme, integral definida, integrales impropias y series, funciones de varias variables.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ____ Calificación: _________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.
Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y sea $\lambda > 0$. Demuestre que

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A).$$

Problema 2.
Usando la definición del límite demuestre que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{7 - x} = +\infty.$$

Problema 3.
Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto 5 y tal que $f(5) = 3$. Demuestre que:

i) existe un $\delta_1 > 0$ tales que $f(x) \geqslant 1$ para todo $x \in (5 - \delta_1, 5 + \delta_1)$;

ii) la función $g(x) \coloneqq \dfrac{1}{f(x)}$ es continua en el punto 5.

Problema 4.
Demuestre que para todo $x > 0$ se cumple la desigualdad

$$\ln(1 + x) > \frac{x}{x + 1}.$$

Problema 5.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$, encuentre su dominio y asíntotas, intervalos de crecimento y decrecimiento, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Dibuje su gráfica.

Problema 6.

Calcule el límite usando las expansiones de Taylor-Maclaurin:

$$f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\sqrt{1+x^2}-1}{x\big(\operatorname{sen}(x)-\operatorname{tg}(x)\big)}.$$

Problema 7.

Dada la sucesión de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ calcule la función límite y determine si la convergencia es uniforme o no:

$$f_n(x) = x^n, \qquad X = [0,1].$$

Problema 8.

Dibuje la siguiente figura en el plano cartesiano y calcule su área:

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \quad 2^x \leqslant y \leqslant -\frac{x^2}{2}+2x+2\right\}.$$

Problema 9.

Para cada una de las siguientes integrales impropias determine si esta es convergente o no:

$$\int_1^{+\infty} e^{-3x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^3}.$$

Problema 10.

Calcule la matriz jacobiana y el diferencial de la función f en el punto $(1,\pi)$:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\operatorname{sen}(y) \\ \sqrt{x^2+\cos(y)} \end{pmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Examen parcial II. Variante ε.

Supremo e ínfimo, límites de funciones, continuidad de funciones, teoremas sobre funciones derivables, análisis de la variación de las funciones, fórmula de Taylor, convergencia uniforme, integral definida, integrales impropias y series, funciones de varias variables.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ____ Calificación: __________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.
Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

Problema 2.
Usando la definición del límite demuestre que

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}} = +\infty.$$

Problema 3.
Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en el punto x_0. Demuestre que la función fg también es continua en el punto x_0.

Problema 4.
Demuestre que para todo $x > 0$ se cumple la desigualdad

$$e^x > 1 + \ln(1 + x).$$

Problema 5.
Dada la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, encuentre su dominio y asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Dibuje su gráfica.

Problema 6.
Expanda la función f en las potencias de x hasta x^4:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Problema 7.
Dada la sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ calcule la función límite y determine si la convergencia es uniforme o no:

$$f_n(x) = \frac{3n + x}{n}, \qquad X = \mathbb{R}.$$

Problema 8.
Calcule la integral:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos(3x)\, dx.$$

Problema 9.
Para cada una de las siguientes series determine si esta es convergente o no:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n + 5n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Problema 10.
Calcule la matriz jacobiana y el diferencial de la función f en el punto $(1, 2)$:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$