Engrape aquí
No doble

Examen parcial I. Variante α.

Conjuntos, imágenes y preimágenes, desigualdades, sucesiones acotadas, límites se sucesiones, límites de funciones, funciones continuas, derivadas, integrales indefinidas, subconjuntos del plano.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ____ Calificación: _________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.
Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demuestre que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Además dibuje los diagramas de Euler-Venn que muestren esta igualdad.

Problema 2.
Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 1$, calcule $f[(-1, 2)]$ y $f^{-1}[(-1, 2)]$.

Problema 3.
Demuestre la propiedad subaditiva del valor absoluto: para todos $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Problema 4.
Demuestre que la siguiente sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, es decir, encuentre una cota superior para $|a_n|$:

$$a_n = \frac{3 + 7\cos(n)}{n - \sqrt{3}}.$$

Problema 5.
Calcule el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 5n^2} - \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 5} \right).$$

Problema 6.
Usando la definición ε–δ del límite demuestre que

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-2} = 4.$$

Problema 7.
Demuestre que la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$ tiene al menos un cero real y encuentre un intervalo de longitud $\leqslant 1$ que lo contenga.

Problema 8.
Calcule la derivada de la función

$$f(x) = x^{3\,\mathrm{tg}(x)}.$$

Problema 9.
Calcule la integral indefinida y haga la comprobación:

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{(x-2)^2(x+1)}.$$

Problema 10.
Dibuje el siguiente subconjunto del plano euclidiano:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad |x| \leqslant \cos(y)\right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Examen parcial I. Variante β.

Conjuntos, imágenes y preimágenes, desigualdades, sucesiones acotadas, límites se sucesiones, límites de funciones, funciones continuas, derivadas, integrales indefinidas, subconjuntos del plano.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ____ Calificación: _________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.
Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A \subseteq B$;

(b) $A \cap B = A$;

(c) $A \cup B = B$;

Problema 2.

1. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $X_1 \subseteq X$. Escriba la definición de la imagen $f[X_1]$ del conjunto X_1 bajo la función f.
2. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $Y_1 \subseteq Y$. Escriba la definición de la preimagen $f^{-1}[Y_1]$ del conjunto Y_1 bajo la función f.
3. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea A un subconjunto de X. Demuestre que

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]].$$

4. Dé un ejemplo cuando $A \neq f^{-1}[f[A]]$.

Problema 3.
Demuestre la desigualdad de Bernoulli: para todo $x > -1$ y todo $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$,

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Problema 4.
Demuestre que la siguiente sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no es acotada:

$$a_n = \frac{5n^2}{3 + (-1)^n}.$$

Problema 5.
Usando la definición del límite demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n - 10}{n - 7\cos(n)} = 3.$$

Problema 6.
Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 0} \bigl(\cos(x)\bigr)^{\frac{1}{\ln(1+5x^2)}}.$$

Problema 7.
Elija un valor del parámetro b de tal modo que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula sea continua. Dibuje la gráfica de esta función.

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 5, & \text{si} \quad x > 2; \\ x^2 + b, & \text{si} \quad x \leqslant 2. \end{cases}$$

Problema 8.
Demuestre las fórmulas:

$$\cos'(a) = -\operatorname{sen}(a), \qquad\qquad \operatorname{arc\,sen}'(a) = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Problema 9.
Calcule la integral indefinida y haga la comprobación:

$$\int (x^2 - 3x + 5)e^{3x}\,dx.$$

Problema 10.
Dibuje el subconjunto del plano euclidiano acotado por las siguientes curvas:

$$y = |x^2 - 3|, \qquad y = 2 - |x|.$$

Engrape aquí
No doble

Examen parcial I. Variante γ.

Conjuntos, imágenes y preimágenes, desigualdades, sucesiones acotadas, límites se sucesiones, límites de funciones, funciones continuas, derivadas, integrales indefinidas, subconjuntos del plano.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ____ Calificación: _________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.
Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demuestre que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Además dibuje los diagramas de Euler-Venn que muestren esta igualdad.

Problema 2.

1. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $X_1 \subseteq Y$. Escriba la definición de la imagen $f[X_1]$ del conjunto X_1 bajo la función f.
2. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X. Demuestre que

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B].$$

Problema 3.
Resuelve la siguiente desigualdad (indique para cuáles $x \in \mathbb{R}$ la desigualdad es cierta):

$$-1 \leqslant -\frac{1}{x+3} \leqslant \frac{x-1}{x+3}.$$

Problema 4.
Demuestre que la siguiente sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada:

$$a_n = \frac{n^3}{1.1^n}.$$

Problema 5.
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que tiene un límite finito b. Demuestre que:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.
2. El límite de la sucesión $(5a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $5b$.

Problema 6.
Con la definición ε–δ del límite demuestre que

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3 - 5x\right) = -2.$$

Problema 7.
Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demuestre que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Problema 8.
Encuentre todos los puntos de la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 - 3x$$

en los cuales la linea tangente es paralela a la recta $y = -2x + 5$.

Problema 9.
Calcule la integral indefinida y haga la comprobación:

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 3}{(x+2)(x^2+2x+3)}\,dx.$$

Problema 10.
Dibuje el siguiente subconjunto del plano euclidiano:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |y| \leqslant |x| \quad \wedge \quad -2 \leqslant x \leqslant 2 - y^2\right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Examen parcial I. Variante δ.

Conjuntos, imágenes y preimágenes, desigualdades, sucesiones acotadas, límites se sucesiones, límites de funciones, funciones continuas, derivadas, integrales indefinidas, subconjuntos del plano.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ____ Calificación: __________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.
Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demuestre que

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Además dibuje los diagramas de Euler-Venn que muestren esta igualdad.

Problema 2.

1. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $Y_1 \subseteq Y$. Escriba la definición de la preimagen $f^{-1}[Y_1]$ del conjunto Y_1 bajo la función f.
2. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sean A y B subconjuntos de Y. Demuestre que

$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B], \qquad f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

Problema 3.
Demuestre que existe un número positivo C tal que para todo $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$,

$$3^n \geqslant Cn^5.$$

Problema 4.
Dé un ejemplo de dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no acotadas tales que su producto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.

Problema 5.
Usando la definición del límite demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2^n} = 0.$$

Problema 6.
Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 16x + 20}{3x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4}.$$

Problema 7.
Determine con qué valor a, la siguiente función es continua. Dibuje su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3}, & \text{si} \quad x \neq -3; \\ a, & \text{si} \quad x \leqslant 2. \end{cases}$$

Problema 8.
Demuestre que la función definida por

$$f(x) = |x|x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

es diferenciable para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $f''(x)$ existe para todo $x \neq 0$, pero que $f''(0)$ no existe. Dibuje las gráficas de f, f', f''.

Problema 9.
Calcule la integral indefinida y haga la comprobación:

$$\int \frac{3x^2 + x - 4}{(x+1)(x^2 - x + 2)}\, dx.$$

Problema 10.
Dibuje el subconjunto del plano euclidiano definido mediante las siguientes condiciones:

$$x^2 + y^2 \leqslant 4x + 2y, \qquad 2x + y - 5 \leqslant 0.$$

Engrape aquí
No doble

Examen parcial I. Variante ε.

Conjuntos, imágenes y preimágenes, desigualdades, sucesiones acotadas, límites se sucesiones, límites de funciones, funciones continuas, derivadas, integrales indefinidas, subconjuntos del plano.

Curso propedéutico de Cálculo para la Maestría.

Nombre: ______________________________________ Calificación: __________

El examen dura 120 minutos. Cada uno de los 10 problemas vale 12 %.

Problema 1.
Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demuestre que

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Además dibuje los diagramas de Euler-Venn que muestren esta igualdad.

Problema 2.

1. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $X_1 \subseteq X$. Escriba la definición de la imagen $f[X_1]$ del conjunto X_1 bajo la función f.
2. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $Y_1 \subseteq Y$. Escriba la definición de la preimagen $f^{-1}[Y_1]$ del conjunto Y_1 bajo la función f.
3. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $B \subseteq Y$. Demuestre que
$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B.$$
4. Dé un ejemplo cuando $f[f^{-1}[B]] \neq B$.

Problema 3.
Resuelva la desigualdad:

$$|x - 1| + |x + 2| \geqslant 6.$$

Problema 4.
Demuestre que la siguiente sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, es decir, encuentre una cota superior para $|a_n|$:

$$a_n = \frac{7n \cdot \operatorname{sen}(n) - 5}{n - \frac{5\cdot(-1)^n}{2}}.$$

Problema 5.
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que tiene un límite finito b tal que $b \neq 0$. Usando solamente la definición del límite demuestre que:

1. Existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant p$ se cumple la desigualdad $|a_n| \geqslant \dfrac{b}{2}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{b}$.

Problema 6.
Usando la definición ε–δ del límite demuestre que

$$\lim_{x\to 7} \sqrt[3]{x+1} = 2.$$

Problema 7.
Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = 3a+5, \qquad \max_{x\in[a,b]} f(x) = 3b+5.$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 3c+5$.

Problema 8.
Usando las derivadas demuestre la siguiente desigualdad:

$$\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problema 9.
Calcule la integral indefinida y haga la comprobación:

$$\int e^{3x} \cos(2x)\, dx.$$

Problema 10.
Dibuje el siguiente subconjunto del plano euclidiano:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad x^2 - 2|x| + 3 \leqslant y \leqslant 6\right\}.$$