Definición del límite de una función. Ejemplos para el caso $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Vamos a estudiar qué significa la frase "f tiende al número b cuando su argumento tiende al punto a",

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

en el caso, si la función f está definida en todo el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, y los puntos a y b son elementos de $\mathbb{R}$, es decir, "puntos finitos". Luego vamos a conocer también límites de la forma

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to 4} f(x) = +\infty, \qquad \text{etc.}$$

Definición (la $\boldsymbol{\delta}$-vecindad de un número real). Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$. Entonces el intervalo

$$(a-\delta, a+\delta)$$

se llama la δ-*vecindad* de a. Denotemos este conjunto por $V_a(\delta)$.

1. Ejercicio (dos descripciones de la $\boldsymbol{\delta}$-vecindad de un número real). Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

$$a-\delta < x < a+\delta \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-a| < \delta.$$

Definición (límite finito de una función en un punto finito). Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in V_a(\delta) \quad f(x) \in V_{f(b)}(\varepsilon).$$

En otra forma,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(|x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-b| < \varepsilon \Big).$$

Esquema. Dada una función f y números a, b, ¿cómo demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ usando solamente la definición?.

Hay que comprender que ε es un número positivo cualquiera, lo tratamos como un data inicial. Nuestra tarea consiste en construir un $\delta > 0$ de tal manera que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$. Por lo común este $\delta > 0$ depende de ε y se puede definir como una función de ε.

Ejemplo. Con la definición del límite demostrar que

$$\lim_{x\to 0}(3 - 5x) = 3.$$

Solución. Aquí $f(x) = 3 - 5x$, $a = 0$, $b = 3$. Consideremos la diferencia $|f(x) - b|$:

$$|f(x) - b| = \big|(3 - 5x) - 3\big| = |-5x| = 5|x|.$$

En este ejemplo es fácil resolver la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Definimos $\delta(\varepsilon)$ con la fórmula $\delta(\varepsilon) \coloneqq \dfrac{\varepsilon}{5}$. $\square$

2. Ejercicio. Con la definición del límite demuestre que

$$\lim_{x\to 0}(7 + 2x) = 7.$$

Solución. $f(x) =$ $\qquad\qquad$, $a =$ $\qquad$, $b =$ $\qquad$.

$$|f(x) - b| =$$

Resolvemos la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow$$

Ponemos $\delta(\varepsilon) \coloneqq$ $\square$

Ejemplo. Con la definición del límite demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0.$$

Solución. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$, $b = 0$.

$$|f(x) - b| = |\sqrt[3]{x}|.$$

La desigualdad $|\sqrt[3]{x}| < \varepsilon$ es equivalente a la desigualdad $|x| < \varepsilon^3$.
Ponemos $\delta(\varepsilon) \coloneqq \varepsilon^3$. $\square$

3. Con la definición del límite demuestre que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Ejemplo. Con la definición del límite demostrar que

$$\lim_{x\to 0}(3 - 2x + x^2) = 3.$$

Solución detallada. Aquí $f(x) = 3 - 2x + x^2$, $a = 0$, $b = 3$. Notemos que

$$|f(x) - b| = |3 - 2x + x^2 - 3| = |-2x + x^2| \le 2|x| + |x|^2 = |x| \cdot \big(2 + |x|\big).$$

Nos interesa, qué pasa cuando x es bastante pequeño, por eso podemos suponer, por ejemplo, que

$$|x| < 1. \tag{1}$$

Entonces $2 + |x| < 3$. Multiplicando esta desigualdad por $|x| \ge 0$ obtenemos:

$$|x|\big(2 + |x|\big) \le 3|x|.$$

Para hacer la expresión $3|x|$ menor a ε pedimos que

$$|x| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Pongamos

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

Si $|x| < \delta$, entonces se cumplen ambas condiciones (1) y (2), por lo tanto es válida la siguiente cadena de igualdades y desigualdades:

$$|f(x) - b| = |-2x + x^2| \le 2|x| + |x|^2 = |x|\big(2 + |x|\big) \overset{(1)}{\le} 3|x| \overset{(2)}{<} \varepsilon. \qquad \square$$

Solución breve. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces

$$|f(x) - b| = |-2x + x^2| \le 2|x| + |x|^2 = |x|\big(2 + |x|\big) \overset{(3)}{\le} 3|x| \overset{(4)}{<} \varepsilon$$

donde pedimos las condiciones

$$|x| < 1 \tag{3}$$

$$|x| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Las condiciones (3) y (4) se cumplen si $|x| < \delta$, donde $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$. $\square$

4. Con la definición del límite demuestre que

$$\lim_{x\to 0}(x^3 - 4x + 5) = 5.$$

5. Con la definición del límite demuestre que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x+8} = 2.$$