Notación de Landau “$\mathcal{O}$ grande” para sucesiones

Definición. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la clase $\mathcal{O}(a_n)$ consiste en todas las sucesiones $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\text{la sucesión} \quad \frac{b_n}{a_n} \quad \text{es acotada.}$$

En vez de escribir $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ por lo común se escribe $b_n = \mathcal{O}(a_n)$.

1. Toda sucesión convergente es acotada. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que tiene un límite finito. Demuestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Ejemplo. $3n + 10 \in \mathcal{O}(n^2)$.

2. Demuestre que $\quad 5n^2 + 7n + 2 \in \mathcal{O}(n^2)$.

3. Usando la desigualdad de Bernoulli demuestre que $\quad n^2 \in \mathcal{O}(3^n)$.

4. Demuestre que $\quad 5^n + n^3 \in \mathcal{O}(5^n)$.

5. ¿Qué significa la notación “$b_n \in \mathcal{O}(1)$”?

Ejemplo. $\operatorname{sen}(n^2) + 8 \in \mathcal{O}(1)$.

6. Demuestre que $\quad (-1)^n n^2 + 7n\cos(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

Propiedades de la notación “$\mathcal{O}$ grande”

7. Sea $b_n \in o(a_n)$. Demuestre que $b_n \in \mathcal{O}(a_n)$.

8. Sea $b_n \in \mathcal{O}(a_n)$ y sea $c_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Demuestre que $c_n \in \mathcal{O}(a_n)$.

9. Sea $b_n \in \mathcal{O}(a_n)$ y sea $c_n \in \mathcal{O}(a_n)$. Demuestre que $b_n + c_n \in \mathcal{O}(a_n)$.

10. Sea $b_n \in \mathcal{O}(a_n)$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que $cb_n \in \mathcal{O}(a_n)$.

11. Sea $c_n \in \mathcal{O}(a_n)$ y sea $d_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Demuestre que $c_n d_n \in \mathcal{O}(a_n b_n)$.