

Operadores invariantes bajo traslaciones en espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Egor Maximenko,
trabajo conjunto con
Crispin Herrera Yañez y Gerardo Ramos Vazquez

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Seminario de Análisis, UAM-I
2021-09-02

- 1 Introducción
- 2 Herramientas
- 3 Operadores invariantes en EHNH
- 4 El caso conmutativo

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea D un conjunto y sea H un espacio de funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$, con un producto interno, completo.

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea D un conjunto y sea H un espacio de funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$, con un producto interno, completo.

Una familia $(K_z)_{z \in D} \in H^D$ es un **núcleo reproductor** de H si

$$\forall f \in H \quad \forall z \in D \quad f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea D un conjunto y sea H un espacio de funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$, con un producto interno, completo.

Una familia $(K_z)_{z \in D} \in H^D$ es un **núcleo reproductor** de H si

$$\forall f \in H \quad \forall z \in D \quad f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

Propiedad hermítica y fórmula para la norma:

$$K_z(w) = \overline{K_w(z)}, \quad \|K_z\|^2 = K_z(z),$$

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea D un conjunto y sea H un espacio de funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$, con un producto interno, completo.

Una familia $(K_z)_{z \in D} \in H^D$ es un **núcleo reproductor** de H si

$$\forall f \in H \quad \forall z \in D \quad f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

Propiedad hermítica y fórmula para la norma:

$$K_z(w) = \overline{K_w(z)}, \quad \|K_z\|^2 = K_z(z),$$

El conjunto $\{K_z : z \in D\}$ es total en H .

Ejemplos de EHNR

$L^2_{\text{hol}}(\mathbb{D})$, el espacio de Bergman de funciones analíticas en el disco.

$$K_z(w) = \frac{1}{\pi(1 - \bar{z}w)^2}.$$

$L^2_{\text{hol}}(\Pi)$, el espacio de Bergman de funciones analíticas en el semiplano superior Π ,

$$K_z(w) = -\frac{1}{\pi(w - \bar{z})^2}.$$

$L^2_{\text{hol}}(\mathbb{C}, e^{-|z|^2} d\mu_2(z))$, el espacio de Bargman–Segal–Fock,

$$K_z(w) = e^{\bar{z}w}.$$

Ejemplos de EHNR

$L_{\text{arm}}^2(\Pi)$, el espacio de Bergman de funciones armónicas en Π ,

$$K_z(w) = -\frac{1}{\pi(w - \bar{z})^2} - \frac{1}{\pi(z - \bar{w})^2}.$$

$L_{n\text{-hol}}^2(\Pi)$, funciones n -analíticas:

$$\frac{\partial^n f}{\partial \bar{z}^n} = 0.$$

$$K_z(w) = \frac{n(-1)^n}{\pi} \frac{(z - \bar{w})^{n-1}}{(w - \bar{z})^{n+1}} P_{n-1}^{(0,1)} \left(2 \frac{|w - z|^2}{|w - \bar{z}|^2} - 1 \right).$$

Ejemplos de EHNR

Espacios de ondículas.

$$K_z(w) = \langle \psi_w, \psi_z \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad (z, w \in \Pi).$$

Espacios asociados al núcleo de Gauss–Weierstrass (se usan en machine learning).

$$K_z(w) = \exp \left(-\alpha^2 \sum_{j=1}^n (w_j - \bar{z}_j)^2 \right) \quad (z, w \in \mathbb{C}^n).$$

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar** ν :

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar** ν :

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Ejemplos.

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar** ν :

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Ejemplos.

- \mathbb{R} , con la medida de Lebesgue μ_1 .

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar** ν :

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Ejemplos.

- \mathbb{R} , con la medida de Lebesgue μ_1 .
- $\mathbb{T} = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| = 1\}$, con la longitud del arco normalizada.

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar** ν :

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Ejemplos.

- \mathbb{R} , con la medida de Lebesgue μ_1 .
- $\mathbb{T} = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| = 1\}$, con la longitud del arco normalizada.
- $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, isomorfo a \mathbb{T} .

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar** ν :

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Ejemplos.

- \mathbb{R} , con la medida de Lebesgue μ_1 .
- $\mathbb{T} = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| = 1\}$, con la longitud del arco normalizada.
- $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, isomorfo a \mathbb{T} .
- \mathbb{Z} , con la medida de conteo.

Representaciones unitarias

Sea H un espacio de Hilbert.

$\mathcal{U}(H) :=$ operadores unitarios en H .

Representaciones unitarias

Sea H un espacio de Hilbert.

$\mathcal{U}(H) :=$ operadores unitarios en H .

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.

Representaciones unitarias

Sea H un espacio de Hilbert.

$\mathcal{U}(H) :=$ operadores unitarios en H .

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.

Una **representación unitaria** de G en H
es un homomorfismo $\rho: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ fuertemente continuo.

Representaciones unitarias

Sea H un espacio de Hilbert.

$\mathcal{U}(H) :=$ operadores unitarios en H .

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.

Una **representación unitaria** de G en H
es un homomorfismo $\rho: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ fuertemente continuo.

- $\forall a, b \in G \quad \rho(a + b) = \rho(a)\rho(b)$.
- $\forall f \in H \quad$ la función $a \mapsto \rho(a)f$ es continua.

Ejemplos de representaciones unitarias de grupos

Rotaciones en $L^2_{\text{hol}}(\mathbb{D})$:

$$(\rho(\tau)f)(z) := f(\tau^{-1}z) \quad (\tau \in \mathbb{T}).$$

Ejemplos de representaciones unitarias de grupos

Rotaciones en $L^2_{\text{hol}}(\mathbb{D})$:

$$(\rho(\tau)f)(z) := f(\tau^{-1}z) \quad (\tau \in \mathbb{T}).$$

Desplazamientos horizontales en $L^2_{\text{hol}}(\Pi)$:

$$(\rho(a)f)(z) := f(z - a) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Ejemplos de representaciones unitarias de grupos

Rotaciones en $L^2_{\text{hol}}(\mathbb{D})$:

$$(\rho(\tau)f)(z) := f(\tau^{-1}z) \quad (\tau \in \mathbb{T}).$$

Desplazamientos horizontales en $L^2_{\text{hol}}(\Pi)$:

$$(\rho(a)f)(z) := f(z - a) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Dilataciones en $L^2_{\text{hol}}(\Pi)$:

$$(\rho(b)f)(z) := b^{-1} f(b^{-1}z) \quad (b > 0).$$

Problema: estudiar el centralizador

Dada una representación unitaria ρ de G en H ,
queremos estudiar los operadores que conmutan con ρ :

$$\mathcal{V} := \rho' = \{S \in \mathcal{B}(H) : \forall a \in G \quad S\rho(a) = \rho(a)S\}.$$

Problema: estudiar el centralizador

Dada una representación unitaria ρ de G en H ,
queremos estudiar los operadores que conmutan con ρ :

$$\mathcal{V} := \rho' = \{S \in \mathcal{B}(H) : \forall a \in G \quad S\rho(a) = \rho(a)S\}.$$

\mathcal{V} es un álgebra de von Neumann = álgebra W^* :

- subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ con identidad,
- $\forall S \in \mathcal{V} \quad S^* \in \mathcal{V}$,
- cerrada en la topología débil de operadores.

Ejemplos de \mathcal{V}

$$\mathcal{V} := \rho' = \{S \in \mathcal{B}(H) : \forall a \in G \quad S\rho(a) = \rho(a)S\}.$$

- Operadores radiales: conmutan con las rotaciones.
- Operadores verticales: conmutan con los desplazamientos horizontales.
- Operadores angulares: conmutan con las dilataciones.

Antecedentes: más de 20 ejemplos de clases de operadores invariantes

Varios autores: Vasilevski, Grudsky, Karapetyants, Quiroga-Barranco, Hutník, Hutníková, Mišková, Loaiza-Leyva, Lozano-Arizmendi, Sánchez-Nungaray, Ramírez-Ortega, Ramírez-Mora, Morales-García, etc.

- Operadores radiales en $L^2_{\text{hol}}(\mathbb{D})$.
- Operadores verticales y angulares en $L^2_{\text{hol}}(\Pi)$.
- Operadores radiales en $L^2_{\text{arm}}(\mathbb{D})$.
- Operadores verticales y angulares en $L^2_{\text{arm}}(\Pi)$.
- Operadores verticales en espacios de ondículas.
- Operadores verticales y angulares en $L^2_{n\text{-hol}}(\Pi)$.

Objetivo

Encontrar un esquema que abarque los resultados previos.

Objetivo

Encontrar un esquema que abarque los resultados previos.

¡Para gobernarlos a todos!



- 1 Introducción
- 2 Herramientas**
- 3 Operadores invariantes en EHN
- 4 El caso conmutativo

Operadores de multiplicación en $L^2(X, \mu)$

Sea (X, μ) un espacio de medida σ -finita.

Operadores de multiplicación en $L^2(X, \mu)$

Sea (X, μ) un espacio de medida σ -finita.

Dada $a \in L^\infty(X, \mu)$, definimos $M_a \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$,

$$M_a f := a f.$$

Operadores de multiplicación en $L^2(X, \mu)$

Sea (X, μ) un espacio de medida σ -finita.

Dada $a \in L^\infty(X, \mu)$, definimos $M_a \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$,

$$M_a f := a f.$$

Los operadores de multiplicación tienen propiedades simples:

$$\|M_a\| = \|a\|_\infty, \quad M_a M_b = M_{ab} = M_b M_a, \quad \text{Sp}(M_a) = \text{EssRange}(a).$$

Operadores de multiplicación en $L^2(X, \mu)$

Sea (X, μ) un espacio de medida σ -finita.

Dada $a \in L^\infty(X, \mu)$, definimos $M_a \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$,

$$M_a f := a f.$$

Los operadores de multiplicación tienen propiedades simples:

$$\|M_a\| = \|a\|_\infty, \quad M_a M_b = M_{ab} = M_b M_a, \quad \text{Sp}(M_a) = \text{EssRange}(a).$$

Álgebra de operadores de multiplicación:

$$\mathcal{M}_X := \{M_a : a \in L^\infty(X, \mu)\}.$$

\mathcal{M}_X es un álgebra W^* , es conmutativa, $\mathcal{M}_X \cong L^\infty(X, \mu)$.

El grupo dual de un GALC

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.

Un **caracter** de G es un homomorfismo continuo $G \rightarrow \mathbb{T}$.

Ejemplos:

- $G = \mathbb{R}$, $\widehat{G} = \mathbb{R}$,

$$\psi_\xi(a) = e^{ia\xi},$$

El grupo dual de un GALC

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.

Un **caracter** de G es un homomorfismo continuo $G \rightarrow \mathbb{T}$.

Ejemplos:

- $G = \mathbb{R}, \hat{G} = \mathbb{R},$

$$\psi_\xi(a) = e^{ia\xi},$$

- $G = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \hat{G} = \mathbb{Z},$

$$\psi_k(\theta + 2\pi\mathbb{Z}) = e^{ik\theta}.$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC con una medida de Haar ν .

Para cada f en $L^1(G)$,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)} f(x) d\nu(x) \quad (\xi \in \widehat{G}).$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC con una medida de Haar ν .

Para cada f en $L^1(G)$,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)} f(x) d\nu(x) \quad (\xi \in \widehat{G}).$$

Se puede elegir una medida de Haar $\widehat{\nu}$ en \widehat{G} tal que

$$\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G) \quad \|Ff\|_{L^2(\widehat{G})} = \|f\|_{L^2(G)}.$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC con una medida de Haar ν .

Para cada f en $L^1(G)$,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)} f(x) d\nu(x) \quad (\xi \in \widehat{G}).$$

Se puede elegir una medida de Haar $\widehat{\nu}$ en \widehat{G} tal que

$$\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G) \quad \|Ff\|_{L^2(\widehat{G})} = \|f\|_{L^2(G)}.$$

F se extiende a un isomorfismo isométrico $L^2(G) \rightarrow L^2(\widehat{G})$, que se conoce como la transformada de Fourier–Plancherel.

Ejemplos de medidas de Haar en el grupo dual

μ_1 := la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$

$$\psi_\xi(x) := e^{ix\xi}, \quad \nu = \widehat{\nu} = \frac{\mu_1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ejemplos de medidas de Haar en el grupo dual

μ_1 := la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$

$$\psi_\xi(x) := e^{ix\xi}, \quad \nu = \widehat{\nu} = \frac{\mu_1}{\sqrt{2\pi}}.$$

- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$

$$\psi_\xi(x) := e^{2\pi i x \xi}, \quad \nu = \widehat{\nu} = \mu_1.$$

Ejemplos de medidas de Haar en el grupo dual

μ_1 := la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$

$$\psi_\xi(x) := e^{ix\xi}, \quad \nu = \widehat{\nu} = \frac{\mu_1}{\sqrt{2\pi}}.$$

- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$

$$\psi_\xi(x) := e^{2\pi i x \xi}, \quad \nu = \widehat{\nu} = \mu_1.$$

- $G = \mathbb{T} \cong \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \quad \widehat{G} = \mathbb{Z},$

$$\psi_k(\tau) := \tau^k,$$

$\nu_{\mathbb{T}}$ es la longitud del arco normalizada,

$\widehat{\nu}$ es la medida de conteo en \mathbb{Z} .

Operadores en $L^2(G)$ invariantes bajo traslaciones

Dado a en G , definimos $\rho_G(a): L^2(G) \rightarrow L^2(G)$,

$$(\rho_G(a)f)(x) := f(x - a).$$

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(L^2(G))$. Entonces son equivalentes:

- $S \in \rho'_G$,
- existe σ en $L^\infty(\widehat{G})$ tal que $FSF^* = M_\sigma$.

Operadores en $L^2(G)$ invariantes bajo traslaciones

Dado a en G , definimos $\rho_G(a): L^2(G) \rightarrow L^2(G)$,

$$(\rho_G(a)f)(x) := f(x - a).$$

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(L^2(G))$. Entonces son equivalentes:

- $S \in \rho'_G$,
- existe σ en $L^\infty(\widehat{G})$ tal que $FSF^* = M_\sigma$.

Álgebra de operadores invariantes bajo traslaciones:

$$\rho'_G = \{S \in \mathcal{B}(L^2(G)): \forall a \in G \quad \rho_G(a)S = S\rho_G(a)\} \cong L^\infty(\widehat{G}).$$

Traslaciones horizontales en $L^2(G \times Y)$

Sean G un GALC σ -compacto y metrizable,
 (Y, λ) un espacio de medida σ -finita.
Supongamos que $L^2(\widehat{G})$ y $L^2(Y)$ son separables.

Traslaciones horizontales en $L^2(G \times Y)$

Sean G un GALC σ -compacto y metrizable,
 (Y, λ) un espacio de medida σ -finita.
Supongamos que $L^2(\widehat{G})$ y $L^2(Y)$ son separables.

Para cada a en G definimos $\rho_{G \times Y}(a) \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$,

$$(\rho_{G \times Y}(a)f)(x, y) := f(x - a, y).$$

Traslaciones horizontales en $L^2(G \times Y)$

Sean G un GALC σ -compacto y metrizable,
 (Y, λ) un espacio de medida σ -finita.
Supongamos que $L^2(\widehat{G})$ y $L^2(Y)$ son separables.

Para cada a en G definimos $\rho_{G \times Y}(a) \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$,

$$(\rho_{G \times Y}(a)f)(x, y) := f(x - a, y).$$

En otras palabras,

$$\rho_{G \times Y}(a) = \rho_G(a) \otimes I_{L^2(Y)}.$$

Traslaciones horizontales en $L^2(G \times Y)$

Sean G un GALC σ -compacto y metrizable,
 (Y, λ) un espacio de medida σ -finita.
Supongamos que $L^2(\widehat{G})$ y $L^2(Y)$ son separables.

Para cada a en G definimos $\rho_{G \times Y}(a) \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$,

$$(\rho_{G \times Y}(a)f)(x, y) := f(x - a, y).$$

En otras palabras,

$$\rho_{G \times Y}(a) = \rho_G(a) \otimes I_{L^2(Y)}.$$

$\rho_{G \times Y}$ es una representación unitaria del grupo G en $L^2(G \times Y)$.

Transformada de Fourier respecto a la primera coordenada

$$F \otimes I: L^2(G \times Y) \rightarrow L^2(\widehat{G} \times Y),$$

esto es,

$$((F \otimes I)f)(\xi, y) := \int_G f(x, y) \overline{\xi(x)} \, d\nu(x) \quad (\xi \in \widehat{G}, y \in Y).$$

Descomposición del álgebra $\rho'_{G \times Y}$

Proposición

$$(F \otimes I) \rho'_{G \times Y} (F \otimes I)^* = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} \mathcal{B}(L^2(Y)) \, d\widehat{\nu}(\xi).$$

En otras palabras, para cada S en $\rho'_{G \times Y}$ existe una familia de operadores $(A_\xi)_{\xi \in \widehat{G}}$ en $\mathcal{B}(L^2(Y))$ tal que

$$(F \otimes I) S (F \otimes I)^* = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} A_\xi \, d\widehat{\nu}(\xi).$$

Esto significa que $\forall g \in L^2(\widehat{G} \times Y)$

$$((F \otimes I) S (F \otimes I)^* g)(\xi, \cdot) = A_\xi g(\xi, \cdot).$$

- 1 Introducción
- 2 Herramientas
- 3 Operadores invariantes en EHNH**
- 4 El caso conmutativo

Suposiciones

Trabajamos en el siguiente contexto:

- G es un grupo abeliano localmente compacto G ,
- (Y, λ) es un espacio de medida σ -finita,
- H es un EHNR sobre $G \times Y$,
- H está encajado en $L^2(G \times Y)$,
- H es invariante bajo $\rho_{G \times Y}$.

La invarianza de H bajo traslaciones horizontales

Sea $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$ la proyección ortogonal sobre H :

$$(Pf)(x, y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

Proposición

Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\forall a \in G \quad \rho_{G \times Y}(a)(H) \subseteq H;$
- (b) $\forall a \in G \quad \rho_{G \times Y}(a)P = P\rho_{G \times Y}(a);$
- (c) $\forall a, x \in G \quad \forall y \in Y \quad \rho_{G \times Y}(a)K_{x,y} = K_{x+a,y};$
- (d) $\forall x, u \in G \quad \forall y, v \in Y \quad K_{x,y}(u, v) = K_{0,y}(u - x, v).$

La invarianza de H bajo traslaciones horizontales

Sea $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$ la proyección ortogonal sobre H :

$$(Pf)(x, y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

Proposición

Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\forall a \in G \quad \rho_{G \times Y}(a)(H) \subseteq H;$
- (b) $\forall a \in G \quad \rho_{G \times Y}(a)P = P\rho_{G \times Y}(a);$
- (c) $\forall a, x \in G \quad \forall y \in Y \quad \rho_{G \times Y}(a)K_{x,y} = K_{x+a,y};$
- (d) $\forall x, u \in G \quad \forall y, v \in Y \quad K_{x,y}(u, v) = K_{0,y}(u - x, v).$

En lo que sigue, suponemos que estas propiedades se cumplen.

Representación unitaria de G en H

$\rho_H(a) :=$ el operador $\rho_{G \times Y}(a)$ comprimido a H , i.e.

$$\rho_H(a): H \rightarrow H, \quad (\rho_H(a)f)(x, y) := f(x - a, y).$$

ρ_H es una representación unitaria del grupo G en H .

Representación unitaria de G en H

$\rho_H(a) :=$ el operador $\rho_{G \times Y}(a)$ comprimido a H , i.e.

$$\rho_H(a): H \rightarrow H, \quad (\rho_H(a)f)(x, y) := f(x - a, y).$$

ρ_H es una representación unitaria del grupo G en H .

El objetivo es estudiar el centralizador de ρ_H :

$$\mathcal{V} := \{S \in \mathcal{B}(H): \forall a \in G \quad \rho_H(a)S = S\rho_H(a)\}.$$

La proyección sobre H parece convolución

$$\begin{aligned}(Pf)(x, y) &= \int_G \int_Y f(u, v) \overline{K_{x,y}(u, v)} \, d\nu(u) d\lambda(v) \\ &= \int_G \int_Y f(u, v) K_{0,v}(x - u, y) \, d\nu(u) d\lambda(v).\end{aligned}$$

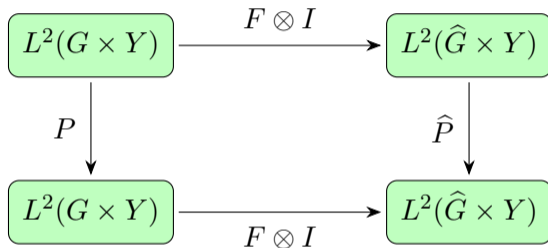
¡Tenemos una convolución sobre la primera coordenada!

Hay que aplicar $F \otimes I$.

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G \overline{\xi(u)} K_{0,y}(u, v) \, d\nu(u).$$

La proyección P en las imágenes de Fourier

Pongamos $\hat{P} := (F \otimes I)P(F \otimes I)^*$.



Proposición

Bajo ciertas condiciones adicionales sobre K y L ,

$$(\hat{P}g)(\xi, y) = \int_Y g(\xi, v) \overline{L_{\xi, y}(v)} d\lambda(v).$$

Propiedades de la función L

Propiedad hermítica:

$$\overline{L_{\xi,y}(v)} = L_{\xi,v}(y).$$

Propiedad reproductora para L :

$$L_{\xi,y}(v) = \langle L_{\xi,y}, L_{\xi,v} \rangle = \int_Y L_{\xi,y}(z) L_{\xi,z}(v) d\lambda(z).$$

Asociamos una fibra a cada frecuencia

Definimos $\widehat{P}_\xi \in \mathcal{B}(L^2(Y))$,

$$(\widehat{P}_\xi h)(y) := \langle h, L_{\xi,y} \rangle = \int_Y h(v) \overline{L_{\xi,y}(v)} \, d\lambda(v),$$

$$\widehat{H}_\xi := \widehat{P}_\xi(L^2(Y)).$$

Entonces para cada ξ en \widehat{G}

- \widehat{P}_ξ es una proyección ortogonal,
- \widehat{H}_ξ es un subespacio cerrado de $L^2(Y)$,
- \widehat{H}_ξ tiene núcleo reproductor $(L_{\xi,y})_{y \in Y}$.

Descomposición de \widehat{H} en fibras

Nos restringimos a las frecuencias no triviales:

$$\begin{aligned}\Omega &:= \{\xi \in \widehat{G}: \dim(\widehat{H}_\xi) > 0\} \\ &= \left\{ \xi \in \widehat{G}: \int_Y L_{\xi,v}(v) d\lambda(v) > 0 \right\}.\end{aligned}$$

$$\widehat{H} := (F \otimes I)(H).$$

Proposición

$$\widehat{H} = \int_{\Omega}^{\oplus} \widehat{H}_\xi d\widehat{\nu}(\xi).$$

Descomposición del álgebra \mathcal{V}

$\Phi: H \rightarrow \hat{H}$ es la compresión de $F \otimes I$.

Descomposición del álgebra \mathcal{V}

$\Phi: H \rightarrow \hat{H}$ es la compresión de $F \otimes I$.

Teorema 1

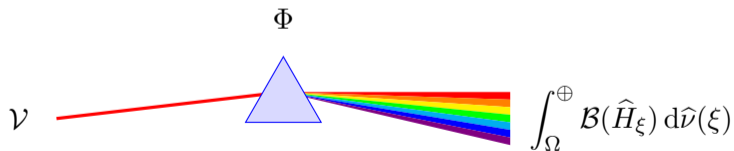
$$\Phi \mathcal{V} \Phi^* = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{B}(\hat{H}_{\xi}) d\hat{\nu}(\xi).$$

Descomposición del álgebra \mathcal{V}

$\Phi: H \rightarrow \hat{H}$ es la compresión de $F \otimes I$.

Teorema 1

$$\Phi \mathcal{V} \Phi^* = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{B}(\hat{H}_{\xi}) d\hat{\nu}(\xi).$$



Criterio de conmutatividad de \mathcal{V}

Teorema 2

Las siguientes condiciones son equivalentes:

- \mathcal{V} es conmutativa;
- $\forall \xi \in \Omega \quad \dim(\widehat{H}_\xi) = 1;$
- $\forall \xi \in \Omega \quad \forall y, v \in Y \quad |L_{\xi,y}(v)|^2 = L_{\xi,y}(y)L_{\xi,v}(v);$
- *existe una función medible $q: \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$L_{\xi,y}(v) = \overline{q_\xi(y)}q_\xi(v).$$

- 1 Introducción
- 2 Herramientas
- 3 Operadores invariantes en EHNH
- 4 El caso conmutativo**

El caso conmutativo

Está dada una familia $(q_\xi)_{\xi \in \Omega}$ tal que

$$\forall \xi \in \Omega \quad \hat{H}_\xi = \mathbb{C}q_\xi, \quad \|q_\xi\| = 1.$$

El caso conmutativo

Está dada una familia $(q_\xi)_{\xi \in \Omega}$ tal que

$$\forall \xi \in \Omega \quad \widehat{H}_\xi = \mathbb{C}q_\xi, \quad \|q_\xi\| = 1.$$

Entonces podremos identificar \widehat{H}_ξ con \mathbb{C} .

El caso conmutativo

Está dada una familia $(q_\xi)_{\xi \in \Omega}$ tal que

$$\forall \xi \in \Omega \quad \widehat{H}_\xi = \mathbb{C}q_\xi, \quad \|q_\xi\| = 1.$$

Entonces podremos identificar \widehat{H}_ξ con \mathbb{C} .

Definimos $N: \widehat{H} \rightarrow L^2(\Omega)$,

$$(Ng)(\xi) := \langle g(\xi, \cdot), q_\xi \rangle.$$

Definimos $R: H \rightarrow L^2(\Omega)$,

$$R := N\Phi.$$

El caso conmutativo

Está dada una familia $(q_\xi)_{\xi \in \Omega}$ tal que

$$\forall \xi \in \Omega \quad \widehat{H}_\xi = \mathbb{C}q_\xi, \quad \|q_\xi\| = 1.$$

Entonces podremos identificar \widehat{H}_ξ con \mathbb{C} .

Definimos $N: \widehat{H} \rightarrow L^2(\Omega)$,

$$(Ng)(\xi) := \langle g(\xi, \cdot), q_\xi \rangle.$$

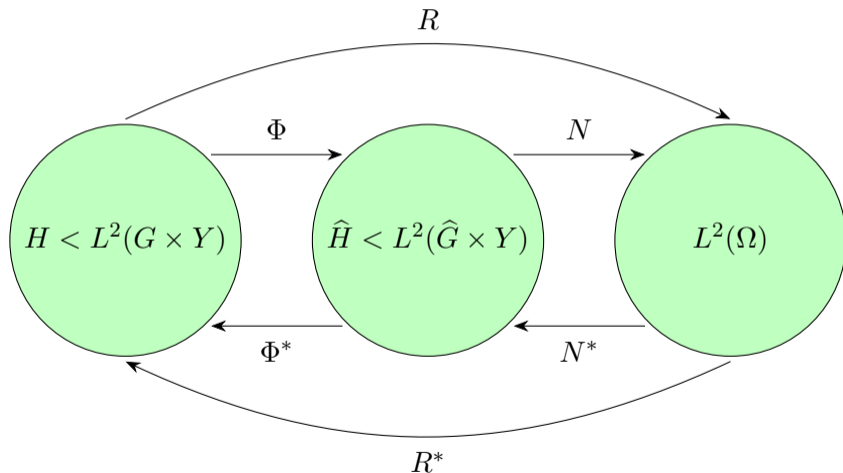
Definimos $R: H \rightarrow L^2(\Omega)$,

$$R := N\Phi.$$

Proposición

Los operadores N y R son unitarios.

Tres mundos en el caso conmutativo



Diagonalización de \mathcal{V} en el caso conmutativo

Teorema 3

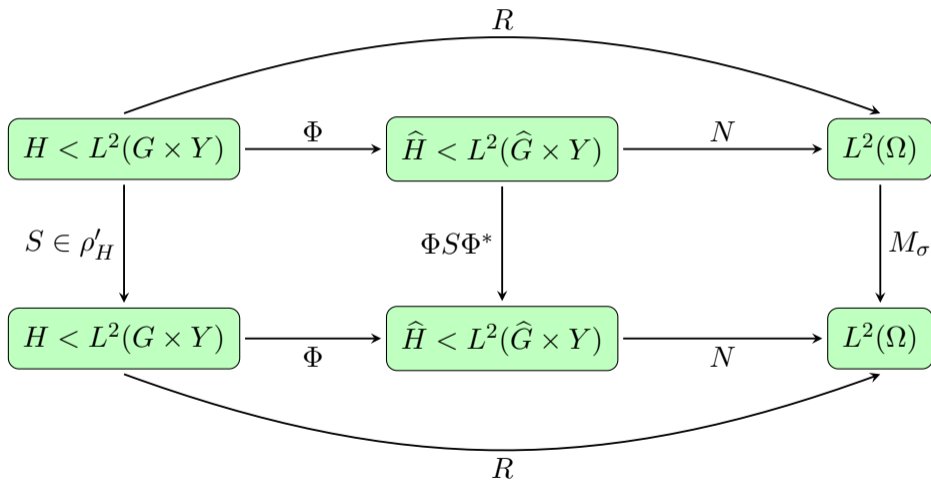
Supongamos que $\dim(\widehat{H}_\xi) = 1$ para cada ξ en Ω . Entonces

$$\mathcal{V} \cong L^\infty(\Omega),$$

y la siguiente función es un isomorfismo isométrico de W^* -álgebras:

$$\Lambda: L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}, \quad \Lambda(\sigma) := R^* M_\sigma R.$$

Diagonalización de \mathcal{V} en el caso conmutativo



Operadores de Toeplitz con símbolos invariantes

Para $g \in L^\infty(G \times Y)$,

$$T_g f := P(f g).$$

Proposición

Sea $g \in L^\infty(Y)$. La extendemos a $G \times Y$:

$$g(x, y) := g(y).$$

Entonces $T_g \in \mathcal{V}$ y

$$R^* T_g R = M_{\gamma_g},$$

donde

$$\gamma_g(\xi) = \int_Y g(y) L_{\xi, y}(y) d\lambda(y).$$

Ejemplo: operadores verticales en $L_{\text{hol}}(\Pi)$

$H :=$ el espacio de Bergman sobre $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$$K_{(x,y)}(u,v) = -\frac{1}{(u-x+i(v+y))^2}.$$

Ejemplo: operadores verticales en $L_{\text{hol}}(\Pi)$

$H :=$ el espacio de Bergman sobre $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$$K_{(x,y)}(u,v) = -\frac{1}{(u-x+i(v+y))^2}.$$

$$L_{\xi,y}(v) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iu\xi} du}{\pi(u+i(v+y))^2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi e^{-\xi(y+v)}, & \xi > 0; \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases}$$

Ejemplo: operadores verticales en $L_{\text{hol}}(\Pi)$

$H :=$ el espacio de Bergman sobre $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$$K_{(x,y)}(u,v) = -\frac{1}{(u-x+i(v+y))^2}.$$

$$L_{\xi,y}(v) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iu\xi} du}{\pi(u+i(v+y))^2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi e^{-\xi(y+v)}, & \xi > 0; \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases}$$

Notamos que $L_{\xi,y}(v)$, con $\xi > 0$, se puede factorizar:

$$L_{\xi,y}(v) = \overline{q_{\xi}(y)} q_{\xi}(v), \quad q_{\xi}(v) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\xi} e^{-\xi v}.$$

Conclusión: en este ejemplo $\Omega = \mathbb{R}_+$, \mathcal{V} es conmutativa,

$$\mathcal{V} \cong L^{\infty}(\Omega).$$