# Operadores radiales en el espacio de Bergman de funciones polianalíticas

Egor Maximenko, en base de estudios conjuntos con

Gerardo Ramos Vázquez, Roberto Moisés Barrera Castelán y Ana María Tellería Romero

Afiliación: Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

XXV Jornadas de Análisis Matemático y sus Aplicaciones
Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco
2019-11-06

# Plan

Polinomios de Jacobi

Base ortonormal en $L^2(\mathbb{D})$

Espacios poli-Bergman $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

Operadores radiales

# Familias de polinomios ortogonales

Intervalos abiertos:

$$\emptyset, \quad (a,b), \quad (a,+\infty), \quad (-\infty,b), \quad (-\infty,+\infty).$$

Tres casos principales:

| intervalo | peso | polinomios ortogonales |
|---|---|---|
| $(-\infty,+\infty)$ | $\mathrm{e}^{-x^2}$ | Hermite, $H_n$ |
| $(0,+\infty)$ | $x^\alpha\,\mathrm{e}^{-x}$ | Laguerre, $L_n^{(\alpha)}$ |
| $(-1,1)$ | $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ | Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ |

# Polinomios de Jacobi

Definición mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!\,(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right).$$

Al aplicar la regla de Leibniz, se obtiene la fórmula explícita:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}.$$

Simetría:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x).$$

# Polinomios de Jacobi

## más propiedades a partir de la fórmula explícita

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}.$$

Valores en la frontera:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

La derivada:

$$P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x) = \frac{\alpha+\beta+n+1}{2}\, P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

La integral sobre $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\alpha+\beta+n} \left( \binom{\alpha+n}{n+1} + (-1)^n \binom{\beta+n}{n+1} \right).$$

# Ortogonalidad de los polinomios de Jacobi

Sean $\alpha > -1$, $\beta > -1$.
Consideramos el intervalo $(-1, 1)$ con el peso $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$:

$$\langle f, g \rangle_{\alpha,\beta} := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \,\mathrm{d}x.$$

Lema. Sea $f$ es un polinomio. Entonces

$$\langle f, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2n}\,\langle f', P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} \rangle_{\alpha+1,\beta+1}.$$

**Proposición**

Sea $f$ es un polinomio con $\deg(f) \le n-1$. Entonces

$$\langle f, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle_{\alpha,\beta} = 0.$$

# Polinomios de Jacobi para el intervalo $(0,1)$

$$
\begin{aligned}
Q_n^{(\alpha,\beta)}(t) &:= P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2t) \\
&= \frac{1}{n!\, t^{\alpha}(1-t)^{\beta}}\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(t^{n+\alpha}(1-t)^{n+\beta}\right).
\end{aligned}
$$

- Si $f$ es un polinomio con $\deg(f) \le n-1$, entonces

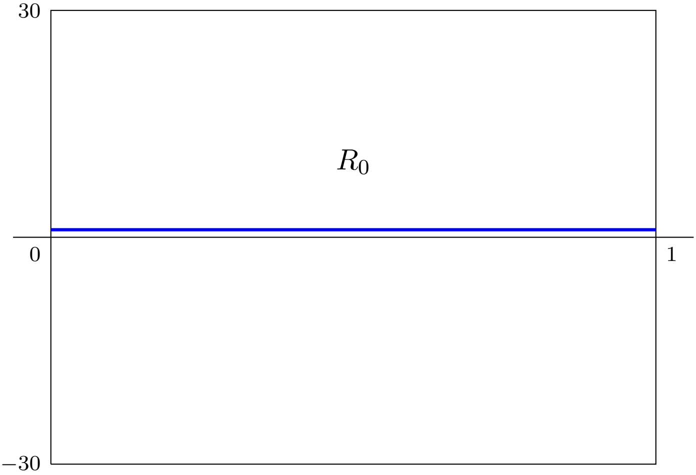
$$
\int_0^1 f(t) Q_n^{(\alpha,\beta)}(t)\, t^{\alpha}(1-t)^{\beta}\,\mathrm{d}t = 0.
$$

- La integral sobre $[0,1]$:

$$
\int_0^1 Q_n^{(\alpha,\beta)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+\beta+n}\left(\binom{\alpha+n}{n+1} + (-1)^n \binom{\beta+n}{n+1}\right).
$$

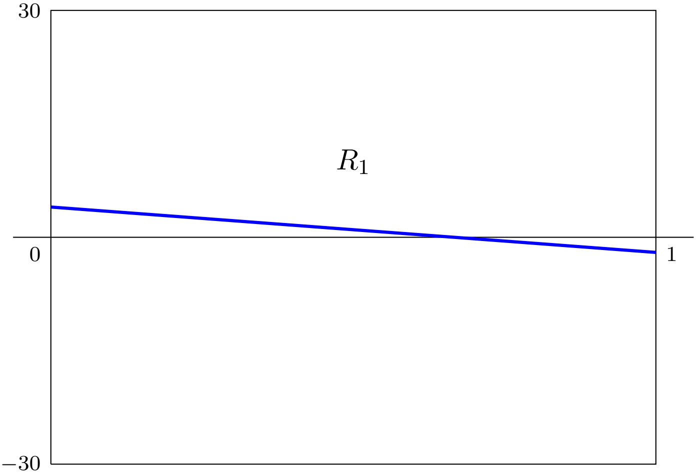
# Polinomios $R_n := (n+1)Q_n^{(1,0)}$

$$R_n(t) := (n+1)Q_n^{(1,0)}(t) = (n+1)P_n^{(1,0)}(1-2t).$$



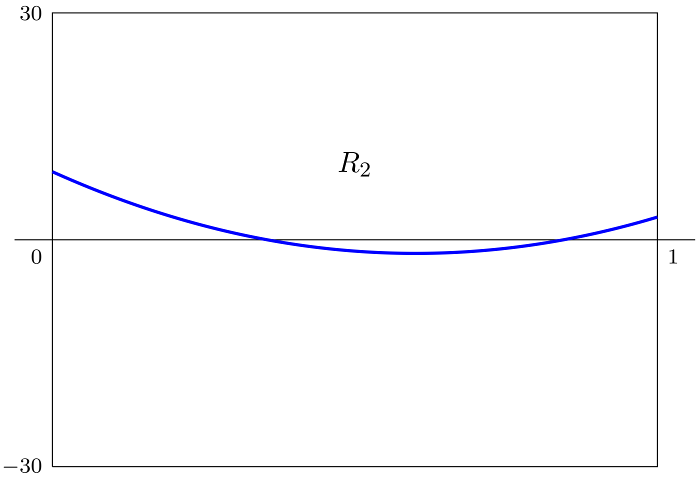
# Polinomios $R_n := (n+1)Q_n^{(1,0)}$

$$R_n(t) := (n+1)Q_n^{(1,0)}(t) = (n+1)P_n^{(1,0)}(1-2t).$$



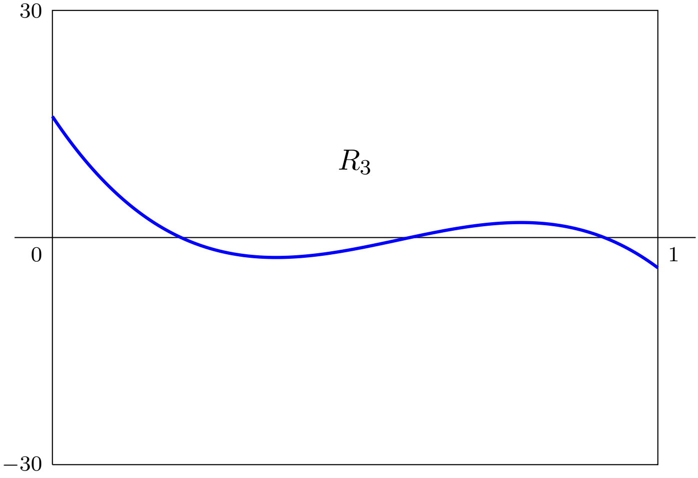
# Polinomios $R_n := (n+1)Q_n^{(1,0)}$

$$R_n(t) := (n+1)Q_n^{(1,0)}(t) = (n+1)P_n^{(1,0)}(1-2t).$$



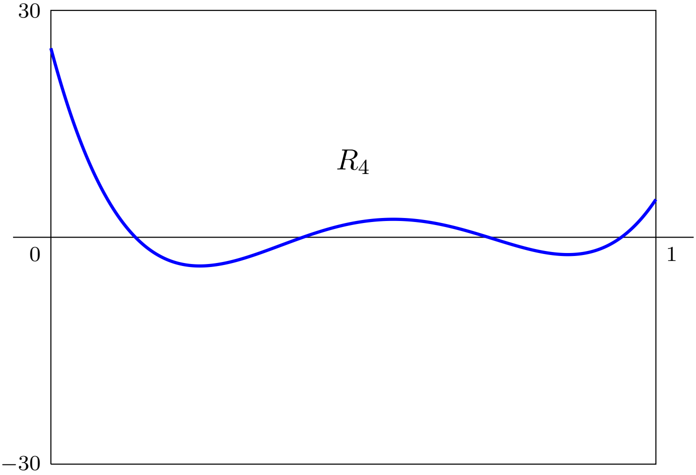
# Polinomios $R_n := (n+1)Q_n^{(1,0)}$

$$R_n(t) := (n+1)Q_n^{(1,0)}(t) = (n+1)P_n^{(1,0)}(1-2t).$$



# Polinomios $R_n := (n+1)Q_n^{(1,0)}$

$$R_n(t) := (n+1)Q_n^{(1,0)}(t) = (n+1)P_n^{(1,0)}(1-2t).$$



# Propiedad reproductora del polinomio $R_n$

$$R_n(t) \coloneqq (n+1)Q_n^{(1,0)}(t) = (n+1)P_n^{(1,0)}(1-2t).$$

Propiedades:

$$\int_0^1 f(t)\,R_n(t)\,t\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (\deg(f) < n).$$

$$\int_0^1 R_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

**Propiedad reproductora de $R_n$**

$$\int_0^1 t^m R_n(t)\,\mathrm{d}t = \delta_{m,0} \qquad (0 \le m \le n).$$

Corolario. Para cada polinomio $f$ de grado $\le n$,

$$\int_0^1 f(u-t) R_n(t)\,\mathrm{d}t = f(u).$$

# Espacio $L^2(\mathbb{D})$, coordenadas polares

Disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$,
con la medida de Lebesgue normalizada $\mu/\pi$.

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)}\,\mathrm{d}\mu(w).$$

En coordenadas polares,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta})\overline{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta})}\,\mathrm{d}\vartheta\right) 2r\,\mathrm{d}r.$$

# Ortonormalidad de las funciones básicas de Fourier

Para cada $k$ en $\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = \delta_{k,0}.$$

De manera equivalente, para $j, k$ en $\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,j\vartheta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = \delta_{j,k}.$$

# Funciones polinomiales como subconjunto de $L^2(\mathbb{D})$

Funciones monomiales:

$$m_{p,q}(z) := z^p\,\overline{z}^q \qquad (z \in \mathbb{D},\ p, q \in \mathbb{N}_0).$$

$$\begin{matrix} m_{0,0}(z) = 1 & m_{0,1}(z) = \overline{z} & m_{0,2}(z) = \overline{z}^2 & \dots \\ m_{1,0}(z) = z^1 & m_{1,1}(z) = z^1\overline{z}^1 & m_{1,2}(z) = z^1\overline{z}^2 & \dots \\ m_{2,0}(z) = z^2 & m_{2,1}(z) = z^2\overline{z}^1 & m_{2,2}(z) = z^2\overline{z}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Funciones polinomiales:

$$\mathcal{P} := \operatorname{lin}\{m_{p,q}\colon\ p, q \in \mathbb{N}_0\}.$$

$\mathcal{P}$ es denso en $L^2(\mathbb{D})$.

# Producto interno de dos funciones monomiales

$$\langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle =$$

# Producto interno de dos funciones monomiales

$$\langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle = \delta_{p-q,j-k} \, \frac{2}{p+q+j+k+2}.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}\langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} z^p \overline{z}^q \overline{z^j \overline{z}^k} \, \mathrm{d}\mu(z) \\ &= 2 \left( \int_0^1 r^{p+q+j+k} \, r \, \mathrm{d}r \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q-j+k)\vartheta} \, \mathrm{d}\vartheta \right).\end{aligned}$$

Si $p - q \neq j - k$, entonces

$$\langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle = 0.$$

Si $p - q = j - k$, entonces

$$\langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle = 2 \int_0^1 r^{p+q+j+k+1} \, \mathrm{d}r = \frac{2}{p+q+j+k+2}.$$

# Diagonales de la tabla de monomios

Para cada $\xi$ en $\mathbb{Z}$,

$$W_\xi := \operatorname{clos}\left(\operatorname{lin}\{m_{j,k} \colon \; j - k = \xi\}\right).$$

$$\begin{matrix} m_{0,0} & m_{0,1} & m_{0,2} & m_{0,3} & m_{0,4} & \ddots \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & \ddots \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & \ddots \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & \ddots \\ m_{4,0} & m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{matrix}$$

# Diagonales de la tabla de monomios

Para cada $\xi$ en $\mathbb{Z}$,

$$W_\xi := \operatorname{clos}\left(\operatorname{lin}\{m_{j,k} : \ j-k=\xi\}\right).$$

$W_0$

$$\begin{matrix} m_{0,0} & m_{0,1} & m_{0,2} & m_{0,3} & m_{0,4} & \ddots \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & \ddots \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & \ddots \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & \ddots \\ m_{4,0} & m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{matrix}$$

# Diagonales de la tabla de monomios

Para cada $\xi$ en $\mathbb{Z}$,

$$W_\xi := \operatorname{clos}\left(\operatorname{lin}\{m_{j,k}\colon\ j-k=\xi\}\right).$$

$W_1$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m_{0,0}$ | $m_{0,1}$ | $m_{0,2}$ | $m_{0,3}$ | $m_{0,4}$ | $\ddots$ |
| **$m_{1,0}$** | $m_{1,1}$ | $m_{1,2}$ | $m_{1,3}$ | $m_{1,4}$ | $\ddots$ |
| $m_{2,0}$ | **$m_{2,1}$** | $m_{2,2}$ | $m_{2,3}$ | $m_{2,4}$ | $\ddots$ |
| $m_{3,0}$ | $m_{3,1}$ | **$m_{3,2}$** | $m_{3,3}$ | $m_{3,4}$ | $\ddots$ |
| $m_{4,0}$ | $m_{4,1}$ | $m_{4,2}$ | **$m_{4,3}$** | $m_{4,4}$ | $\ddots$ |
| $\ddots$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $\ddots$ | **$\ddots$** | $\ddots$ |

# Diagonales de la tabla de monomios

Para cada $\xi$ en $\mathbb{Z}$,

$$W_\xi := \operatorname{clos}\left(\operatorname{lin}\{m_{j,k}:\ \ j-k=\xi\}\right).$$

$W_2$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m_{0,0}$ | $m_{0,1}$ | $m_{0,2}$ | $m_{0,3}$ | $m_{0,4}$ | $\ddots$ |
| $m_{1,0}$ | $m_{1,1}$ | $m_{1,2}$ | $m_{1,3}$ | $m_{1,4}$ | $\ddots$ |
| $m_{2,0}$ | $m_{2,1}$ | $m_{2,2}$ | $m_{2,3}$ | $m_{2,4}$ | $\ddots$ |
| $m_{3,0}$ | $m_{3,1}$ | $m_{3,2}$ | $m_{3,3}$ | $m_{3,4}$ | $\ddots$ |
| $m_{4,0}$ | $m_{4,1}$ | $m_{4,2}$ | $m_{4,3}$ | $m_{4,4}$ | $\ddots$ |
| $\ddots$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $\ddots$ |

# Diagonales de la tabla de monomios

Para cada $\xi$ en $\mathbb{Z}$,

$$W_\xi := \operatorname{clos}\left(\operatorname{lin}\{m_{j,k}\colon \ j-k=\xi\}\right).$$

$W_{-1}$

$$\begin{array}{cccccc}
m_{0,0} & \boxed{m_{0,1}} & m_{0,2} & m_{0,3} & m_{0,4} & \ddots \\
m_{1,0} & m_{1,1} & \boxed{m_{1,2}} & m_{1,3} & m_{1,4} & \ddots \\
m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & \boxed{m_{2,3}} & m_{2,4} & \ddots \\
m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & \boxed{m_{3,4}} & \ddots \\
m_{4,0} & m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & \boxed{\ddots} \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}$$

# Diagonales de la tabla de monomios

Para cada $\xi$ en $\mathbb{Z}$,

$$W_\xi := \operatorname{clos}\left(\operatorname{lin}\{m_{j,k}\colon\ j-k=\xi\}\right).$$

$W_{-2}$

$$\begin{matrix} m_{0,0} & m_{0,1} & m_{0,2} & m_{0,3} & m_{0,4} & \ddots \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & \ddots \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & \ddots \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & \ddots \\ m_{4,0} & m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{matrix}$$

Si $\xi \neq \eta$, entonces $W_\xi \perp W_\eta$.

# Base ortonormal polinomial en $L^2(\mathbb{D})$

$$b_{p,q}(z) := (-1)^{p+q}\frac{\sqrt{p+q+1}}{(p+q)!}\ \frac{\partial^q}{\partial z^q}\ \frac{\partial^p}{\partial \overline{z}^p}\Big((1-z\,\overline{z})^{p+q}\Big)$$

$$= \sqrt{p+q+1}\ \sum_{k=0}^{\min\{p,q\}} (-1)^k\,\frac{(p+q-k)!}{k!\,(p-k)!\,(q-k)!}\,z^{p-k}\,\overline{z}^{q-k}.$$

Simetría hermiteana:

$$b_{q,p}(z) = \overline{b_{p,q}(z)}.$$

Otra forma equivalente:

$$b_{p,q}(z) = (-1)^q\frac{\sqrt{p+q+1}}{q!}\,\frac{\partial^q}{\partial z^q}\Big(z^p\,(1-z\,\overline{z})^q\Big).$$

Para $p \geq q$,

$$b_{p,q}(z) = (-1)^q\,\sqrt{p+q+1}\,z^{p-q}\,Q_q^{(p-q,0)}(|z|^2).$$

# Subespacios diagonales truncados

## Equivalencia entre $b_{j,k}$ y $m_{j,k}$

$$W_{0,2} = \operatorname{lin}\{m_{0,0}, m_{1,1}\} = \operatorname{lin}\{b_{0,0}, b_{1,1}\}$$

$$\begin{array}{ccccc} m_{0,0} & m_{0,1} & m_{0,2} & m_{0,3} & \cdots \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & b_{0,3} & \cdots \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots \\ b_{3,0} & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

# Subespacios diagonales truncados

## Equivalencia entre $b_{j,k}$ y $m_{j,k}$

$$W_{-1,2} = \operatorname{lin}\{m_{0,1}, m_{1,2}\} = \operatorname{lin}\{b_{0,1}, b_{1,2}\}$$

$$\begin{matrix} m_{0,0} & \boxed{m_{0,1}} & m_{0,2} & m_{0,3} & \cdots \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \boxed{m_{1,2}} & m_{1,3} & \cdots \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{0,0} & \boxed{b_{0,1}} & b_{0,2} & b_{0,3} & \cdots \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \boxed{b_{1,2}} & b_{1,3} & \cdots \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots \\ b_{3,0} & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

# Subespacios diagonales truncados

## Equivalencia entre $b_{j,k}$ y $m_{j,k}$

$$W_{1,3} = \operatorname{lin}\{m_{1,0}, m_{2,1}, m_{3,2}\} = \operatorname{lin}\{b_{1,0}, b_{2,1}, b_{3,2}\}$$

$$\begin{matrix} m_{0,0} & m_{0,1} & m_{0,2} & m_{0,3} & \cdots \\ \boxed{m_{1,0}} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots \\ m_{2,0} & \boxed{m_{2,1}} & m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots \\ m_{3,0} & m_{3,1} & \boxed{m_{3,2}} & m_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & b_{0,3} & \cdots \\ \boxed{b_{1,0}} & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots \\ b_{2,0} & \boxed{b_{2,1}} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots \\ b_{3,0} & b_{3,1} & \boxed{b_{3,2}} & b_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

# Funciones $n$-analíticas

Sea $\Omega$ un conjunto abierto en $\mathbb{C}$.
Una función $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ se llama ***n*-analítica** si

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^n f \equiv 0.$$

Notación: $\mathcal{A}_n(\Omega)$.

Ejemplo: $m_{p,q} \in \mathcal{A}_{q+1}(\mathbb{D})$.

M.B. Balk, Polyanalytic Functions, Akad.-Verl., 1991.

# Funciones $n$-analíticas

## descomposición en series de potencias

$$f \in \mathcal{A}_n(\mathbb{D})$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists g_0, \ldots, g_{n-1} \in A(\mathbb{D}) \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(z)\, \overline{z}^k$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists c_{j,k} \in \mathbb{C} \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k}\, z^j\, \overline{z}^k.$$

Para cada $a$ en $(0,1)$, la convergencia es uniforme en $\operatorname{clos}(a\mathbb{D})$.

# Funciones $n$-analíticas

Consideremos

$$f(z) := 1 - |z|^2.$$

La función $f$ es de clase $\mathcal{A}_2(\mathbb{C})$,
se anula en $\partial\mathbb{D}$, pero no se anula en $\mathbb{D}$.

- No se cumple el principio de unicidad.
- No se cumple el principio del módulo máximo.

# Propiedad del valor medio para funciones $n$-analíticas

**Teorema**

Sea $f \in \mathcal{A}_n^1(\mathbb{D})$. Entonces

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{n-1}(|w|^2)\, f(w)\, \mathrm{d}\mu(w).$$

# Propiedad del valor medio para funciones $n$-analíticas

## Demostración

Para $0 < a < 1$,

$$
\begin{aligned}
J(a) &:= \frac{1}{\pi}\int_{a\mathbb{D}} f(w) R_{n-1}(|w|^2)\,\mathrm{d}\mu(w) \\
&= \sum_{k=0} \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k} \left( \frac{1}{\pi}\int_{a\mathbb{D}} w^j \overline{w}^k R_{n-1}(|w|^2)\,\mathrm{d}\mu(w) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k} \left( \int_0^a r^{j+k} R_{n-1}(r^2)\, 2r\,\mathrm{d}r \right) \left( \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,k} \int_0^{a^2} t^k R_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Usando el TCD pasamos al límite cuando $a \to 1$:

$$
J(1) = \lim_{a\to 1} J(a) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,k} \int_0^1 t^k R_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = c_{0,0} = f(0).
$$

## Espacio $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

$$\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D}) := \{f \in A_n(\mathbb{D}) : \ \|f\|_{L^2(\mathbb{D})} < +\infty\}.$$

- ¿Es completo?
- ¿Tiene núcleo reproductor?
- Encontrar una base ortonormal.

Por ahora, sabemos que si $f$ en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, entonces

$$f(0) = \langle f, 1_{\mathbb{D}} \rangle,$$

donde

$$K_{n,0}(w) = R_{n-1}(|w|^2).$$

# Transformaciones de Möbius del disco unitario

Dado $z$ en $\mathbb{D}$, definimos $\varphi_z\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$,

$$\varphi_z(w) := \frac{z - w}{1 - \overline{z}\, w}.$$

Propiedades:

- $\varphi_z(\varphi_z(w)) = w,$
- $\varphi_z(0) = z, \quad \varphi_z(z) = 0,$
- $\varphi_z'(w) = \dfrac{|z|^2 - 1}{(1 - \overline{z}w)^2}.$

# Operador unitario de Pessoa

Sean $z \in \mathbb{D}$, $f \in A_n(\mathbb{D})$. Consideramos $f \circ \varphi_z$:

$$(f \circ \varphi_z)(w) = \sum_{k=0}^{n-1} g(\varphi_z(w))\overline{\varphi_z^k(w)} = \sum_{k=0}^{n-1} g(\varphi_z(w))\frac{(\overline{z} - \overline{w})^k}{(1 - z\,\overline{w})^k}.$$

Problema: $f \circ \varphi_z$ puede no estar en $A_n$.

**Operator unitario de Pessoa**

$$(U_z f)(w) := \frac{(1 - z\,\overline{w})^{n-1}}{(1 - \overline{z}w)^{n-1}} f(\varphi_z(w))\,\varphi_z'(w).$$

$U_z$ es un operator unitario $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$.

- A.D. Koshelev, 1977.
- L.V. Pessoa, 2012.

# Núcleo reproductor de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

**Teorema**

Para $f$ en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ y $z$ en $\mathbb{D}$,

$$f(z) = \langle f, K_{n,z} \rangle,$$

donde

$$K_{n,z}(w) = \frac{(1 - z\overline{w})^{n-1}}{(1 - \overline{z}w)^{n+1}} R_{n-1}(|\varphi_z(w)|^2).$$

**Demostración.**

$$(|z|^2 - 1)f(z) = (U_z f)(0) = \langle U_z f, K_{n,0} \rangle = \langle f, U_z K_{n,0} \rangle.$$

Obtenemos $f(0) = \langle f, K_{n,z} \rangle$ con

$$K_{n,z}(w) = \frac{1}{|z|^2 - 1}(U_z K_{n,0})(w).$$

# Completitud

Si $f \in \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$|f(z)| = |\langle f, K_{n,z} \rangle| \leq \|K_{n,z}\| \, \|f\| = \frac{n}{1 - |z|^2} \, \|f\|.$$

Si $f \in \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ y $0 < a < 1$, entonces

$$\sup_{|z| \leq a} |f(z)| \leq \frac{n}{1 - a^2} \|f\|.$$

La convergencia en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ implica la convergencia uniforme en compactos.

**Teorema**

El espacio $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ es completo.

# Base ortonormal en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

**Teorema**

La familia $(b_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0, 0\le k\le n-1}$ es una base ortonormal de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$.

Base ortonormal de $\mathcal{A}_3^2(\mathbb{D})$:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & b_{0,3} & b_{0,4} & \ddots \\
b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & \ddots \\
b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & \ddots \\
b_{3,0} & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & \ddots \\
b_{4,0} & b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & \ddots \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}$$

A.K. Ramazanov, 1999.

# Generalizaciones

- El disco con peso radial $(1-|z|^2)^\alpha$.
  El núcleo reproductor en términos de $Q_{n-1}^{(1,\alpha)}$.
  Las funciones básicas $b_{p,q}$ en términos de $Q_q^{(p-q,\alpha)}$.
- El semiplano con peso vertical $(\mathrm{Im}(z))^\alpha$.
- La bola unitaria en $\mathbb{C}^n$.
- El dominio de Siegel en $\mathbb{C}^n$.

# Operadores de rotación

$$\mathbb{T} \coloneqq \{\tau \in \mathbb{C}\colon\ |\tau| = 1\}.$$

Para $\tau$ en $\mathbb{T}$,

$$(R_\tau f)(z) \coloneqq f(\tau^{-1} z).$$

El núcleo reproductor es invariante respecto rotaciones:

$$K_{n,\tau z}(\tau w) = K_{n,z}(w).$$

Por eso $R_\tau$ actúa bien en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$).

**Proposición**

La familia $(R_\tau)_{\tau\in\mathbb{T}}$ es una representación unitaria del grupo $\mathbb{T}$ en el espacio $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$.

# Operadores radiales

$$\mathcal{R} := \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})) : \quad \forall \tau \in \mathbb{T} \quad SR_\tau = R_\tau S\}.$$

**Teorema**

$$\mathcal{R} \cong \mathcal{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_n \oplus \mathcal{M}_n \oplus \mathcal{M}_n \oplus \ldots$$

# Operadores radiales

$$\mathcal{R} \simeq \bigoplus_{\xi=-n+1}^{\infty} \mathcal{M}_{\text{mín}\{n,n+\xi\}}$$

$$\begin{pmatrix} (*) \\ \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix}$$