

Base ortonormal polinomial en el espacio $L^2(\mathbb{D})$

Egor Maximenko, en base de estudios conjuntos con

Roberto Moisés Barrera Castelán,

Ana María Tellería Romero,

Gerardo Ramos Vázquez

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Seminario “Matrices y operadores”

2019-11-13

Plan

Funciones monomiales
en $L^2(\mathbb{D})$

Polinomios
de Jacobi

Base ortonormal
en $L^2(\mathbb{D})$

Aplicaciones
a nuestro tema

Plan

Funciones monomiales
en $L^2(\mathbb{D})$

Polinomios
de Jacobi

Base ortonormal
en $L^2(\mathbb{D})$

Aplicaciones
a nuestro tema

Espacio $L^2(\mathbb{D})$

Disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,
 con la medida de Lebesgue normalizada μ/π .

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{g(w)} \, d\mu(w).$$

¿Por qué trabajamos en el disco unitario?

Por el teorema del mapeo de Riemann,
 si G es un subconjunto abierto de \mathbb{C} ,
 G es simplemente conexo, $G \neq \emptyset$, $G \neq \mathbb{C}$,
 entonces existe una función biholomorfa $G \rightarrow \mathbb{D}$.

Funciones monomiales en z y \bar{z}

$$m_{p,q}(z) := z^p \bar{z}^q \quad (z \in \mathbb{D}, p, q \in \mathbb{N}_0).$$

$$\begin{array}{llll}
 m_{0,0}(z) = 1 & m_{0,1}(z) = \bar{z} & m_{0,2}(z) = \bar{z}^2 & \dots \\
 m_{1,0}(z) = z^1 & m_{1,1}(z) = z^1 \bar{z}^1 & m_{1,2}(z) = z^1 \bar{z}^2 & \dots \\
 m_{2,0}(z) = z^2 & m_{2,1}(z) = z^2 \bar{z}^1 & m_{2,2}(z) = z^2 \bar{z}^2 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

Funciones polinomiales en z y \bar{z}

$$\mathcal{P}(\mathbb{D}) := \text{lin}\{m_{p,q} : p, q \in \mathbb{N}_0\}.$$

Polinomios en dos variables:

$$P(t, u) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{p,q} t^p u^q.$$

Funciones polinomiales en z y \bar{z} :

$$f(z) = P(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{p,q} z^j \bar{z}^k.$$

Funciones polinomiales en $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$:

$$g(z) = Q(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^s b_{p,q} (\text{Re}(z))^j (\text{Im}(z))^k.$$

Funciones polinomiales en z y \bar{z}
= funciones polinomiales en $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$.

Densidad en $L^2(\mathbb{D})$ de las funciones polinomiales

Proposición

El conjunto $\mathcal{P}(\text{clos}(\mathbb{D}))$ es denso en $C(\text{clos}(\mathbb{D}))$.

Demostración. Aplicar el teorema de Stone–Weierstrass.

Proposición

El conjunto $C(\text{clos}(\mathbb{D}))|_{\mathbb{D}}$ es denso en $L^2(\mathbb{D})$,

Demostración. Aplicar el teorema de Luzin.

Proposición

El conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{D})$ es denso en $L^2(\mathbb{D})$.

Objetivo

Construir en $L^2(\mathbb{D})$ una base ortonormal
cuyos elementos sean polinomios en z y \bar{z} .

Integración en coordenadas polares

Cambio de coordenadas: $z = r e^{i\vartheta}$,

$$\operatorname{Re}(z) = r \cos(\vartheta), \quad \operatorname{Im}(z) = r \operatorname{sen}(\vartheta).$$

Matriz de derivadas parciales (matriz de Jacobi):

$$\begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -r \operatorname{sen}(\vartheta) \\ \operatorname{sen}(\vartheta) & r \cos(\vartheta) \end{bmatrix}.$$

El determinante jacobiano:

$$\begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -r \operatorname{sen}(\vartheta) \\ \operatorname{sen}(\vartheta) & r \cos(\vartheta) \end{bmatrix} = r(\cos^2(\vartheta) + \operatorname{sen}^2(\vartheta)) = r.$$

Integración en coordenadas polares:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} h(z) \, d\mu(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\vartheta}) \, d\vartheta \right) 2r \, dr.$$

Carl Gustav Jacob Jacobi

1804–1851



- funciones elípticas
- álgebra lineal
- teoría de números
- ecuaciones diferenciales
- cálculo variacional

Ortonormalidad de las funciones básicas de Fourier

Para cada k en \mathbb{Z} ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\vartheta} \, d\vartheta = \delta_{k,0}.$$

De manera equivalente, para j, k en \mathbb{Z} ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ij\vartheta} e^{-ik\vartheta} \, d\vartheta = \delta_{j,k}.$$

Producto interno de dos funciones monomiales

$$\langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle =$$

Producto interno de dos funciones monomiales

$$\langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle = \delta_{p-q, j-k} \frac{2}{p+q+j+k+2}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} z^p \bar{z}^q \overline{z^j \bar{z}^k} d\mu(z) \\ &= 2 \left(\int_0^1 r^{p+q+j+k} r dr \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(p-q-j+k)\vartheta} d\vartheta \right). \end{aligned}$$

Si $p - q \neq j - k$, entonces

$$\langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle = 0.$$

Si $p - q = j - k$, entonces

$$\langle m_{p,q}, m_{j,k} \rangle = 2 \int_0^1 r^{p+q+j+k+1} dr = \frac{2}{p+q+j+k+2}.$$

Diagonales de la tabla de monomios

Para cada ξ en \mathbb{Z} ,

$$W_\xi := \text{clos}(\text{lin}\{m_{j,k} : j - k = \xi\}).$$

	$m_{0,0}$	$m_{0,1}$	$m_{0,2}$	$m_{0,3}$	$m_{0,4}$	\ddots
	$m_{1,0}$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$	\ddots
	$m_{2,0}$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$	\ddots
	$m_{3,0}$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$	\ddots
	$m_{4,0}$	$m_{4,1}$	$m_{4,2}$	$m_{4,3}$	$m_{4,4}$	\ddots
W_1	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots

Diagonales de la tabla de monomios

Para cada ξ en \mathbb{Z} ,

$$W_\xi := \text{clos}(\text{lin}\{m_{j,k} : j - k = \xi\}).$$

	$m_{0,0}$	$m_{0,1}$	$m_{0,2}$	$m_{0,3}$	$m_{0,4}$	\ddots
	$m_{1,0}$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$	\ddots
W_2	$m_{2,0}$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$	\ddots
	$m_{3,0}$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$	\ddots
	$m_{4,0}$	$m_{4,1}$	$m_{4,2}$	$m_{4,3}$	$m_{4,4}$	\ddots
	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots

Diagonales de la tabla de monomios

Para cada ξ en \mathbb{Z} ,

$$W_\xi := \text{clos}(\text{lin}\{m_{j,k} : j - k = \xi\}).$$

	$m_{0,0}$	$m_{0,1}$	$m_{0,2}$	$m_{0,3}$	$m_{0,4}$	\ddots
	$m_{1,0}$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$	\ddots
	$m_{2,0}$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$	\ddots
	$m_{3,0}$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$	\ddots
	$m_{4,0}$	$m_{4,1}$	$m_{4,2}$	$m_{4,3}$	$m_{4,4}$	\ddots
	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots
W_{-1}						

Ortogonalidad de los subespacios diagonales

Proposición

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$W_\xi \perp W_\eta.$$

Por eso es suficiente aplicar la ortogonalización de Gram–Schmidt en cada diagonal por separado.

$$b_{0,0}(z) = 1$$

$$b_{0,1}(z) = \sqrt{2} \bar{z}^1$$

$$b_{0,2}(z) = \sqrt{3} \bar{z}^2$$

$$b_{1,0}(z) = \sqrt{2} z^1$$

$$b_{1,1}(z) = \sqrt{3} (2z^1 \bar{z}^1 - z^0 \bar{z}^0)$$

$$b_{1,2}(z) = \sqrt{4} (3z^1 \bar{z}^2 - 2z^0 \bar{z}^1)$$

$$b_{2,0}(z) = \sqrt{3} z^2$$

$$b_{2,1}(z) = \sqrt{4} (3z^2 \bar{z}^1 - 2z^1 \bar{z}^0)$$

$$b_{2,2}(z) = \sqrt{5} (6z^2 \bar{z}^2 - 6z^1 \bar{z}^1 + z^0 \bar{z}^0)$$

Ortogonalización de polinomios en W_0

Queremos orthogonalizar la sucesión

$$m_{0,0}(z) = 1, \quad m_{1,1}(z) = z \bar{z}, \quad m_{2,2}(z) = z^2 \bar{z}^2, \quad \dots$$

Las combinaciones lineales de estos monomios son de la forma

$$f(z) = P(z \bar{z}),$$

donde P es un polinomio de una variable.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} P(z \bar{z}) Q(z \bar{z}) \, d\mu(z) \\ &= \int_0^1 P(r^2) Q(r^2) 2r \, dr = \int_0^1 P(t) Q(t) \, dt. \end{aligned}$$

Buscamos polinomios ortogonales en $(0, 1)$.

Ortogonalización de polinomios en W_3

Queremos ortogonalizar la sucesión

$$m_{3,0}(z) = z^3, \quad m_{4,1}(z) = z^4 \bar{z}^1, \quad m_{5,2}(z) = z^5 \bar{z}^2, \quad \dots$$

Las combinaciones lineales de estos monomios son de la forma

$$f(z) = z^3 P(z \bar{z}),$$

donde P es un polinomio de una variable.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} z^3 P(z \bar{z}) \bar{z}^3 Q(z \bar{z}) d\mu(z) \\ &= \int_0^1 r^6 P(r^2) Q(r^2) 2r dr = \int_0^1 t^3 P(t) Q(t) dt. \end{aligned}$$

Buscamos polinomios ortogonales en $(0, 1)$, con peso t^3 .

Plan

Funciones monomiales
en $L^2(\mathbb{D})$

Polinomios
de Jacobi

Base ortonormal
en $L^2(\mathbb{D})$

Aplicaciones
a nuestro tema

Sucesiones de polinomios ortogonales

\mathcal{P} := polinomios de una variable.

\mathcal{P}_m := polinomios de una variable de grado $\leq m$.

Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, y sea $w \in C((a, b), (0, +\infty))$.

Consideremos \mathcal{P} con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_w := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) d\mu(x).$$

Definición: $(f_k)_{k=0}^\infty$ es una **sucesión de polinomios ortogonales** respecto w si

- $\deg(f_k) = k$ para cada k en \mathbb{N}_0 ,
- $\langle f_j, f_k \rangle_w = 0$ para cualesquiera j, k en \mathbb{N}_0 con $j \neq k$.

Unicidad de los polinomios ortogonales

Proposición

Sea $w \in C((a, b), (0, +\infty))$, y sean $(f_k)_{k=0}^\infty, (g_k)_{k=0}^\infty$ sucesiones de polinomios ortogonales con peso w .

Entonces existen $c_k \neq 0$ tales que $g_k = c_k f_k$.

Demostración. Notemos que f_{k+1} es ortogonal al subespacio

$$\text{lin}(f_0, \dots, f_k) = \mathcal{P}_k.$$

Si $f_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$, entonces

$$\begin{bmatrix} \langle 1, f_0 \rangle_w & \langle x, f_0 \rangle_w & \langle x^2, f_0 \rangle_w & \langle x^3, f_0 \rangle_w \\ 0 & \langle x, f_1 \rangle_w & \langle x^2, f_1 \rangle_w & \langle x^3, f_1 \rangle_w \\ 0 & 0 & \langle x^2, f_2 \rangle_w & \langle x^3, f_2 \rangle_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0.$$

El espacio solución es de dimensión 1.

Sucesiones clásicas de polinomios ortogonales

Intervalos abiertos:

$$\emptyset, \quad (a, b), \quad (a, +\infty), \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, +\infty).$$

Tres casos principales:

intervalo	peso	polinomios ortogonales
$(-\infty, +\infty)$	e^{-x^2}	Hermite, H_n
$(0, +\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$	Laguerre, $L_n^{(\alpha)}$
$(-1, 1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}$

 Gabor Szegő, Orthogonal Polynomials, 4th ed., AMS, 1975.

Polinomios de Jacobi

Definición mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}).$$

Al aplicar la regla de Leibniz, se obtiene la fórmula explícita:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}.$$

Simetría:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x).$$

Polinomios de Jacobi

más propiedades a partir de la fórmula explícita

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}.$$

Valores en la frontera:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

La derivada:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\alpha + \beta + n + 1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Ortogonalidad de los polinomios de Jacobi

Sean $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Consideramos el intervalo $(-1, 1)$ con el peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$:

$$\langle f, g \rangle_{\alpha, \beta} := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx.$$

Lema. Sea f es un polinomio. Entonces

$$\langle f, P_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_{\alpha, \beta} = \frac{1}{2n} \langle f', P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)} \rangle_{\alpha+1, \beta+1}.$$

Proposición

Sea f es un polinomio con $\deg(f) \leq n-1$. Entonces

$$\langle f, P_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_{\alpha, \beta} = 0.$$

Ortogonalidad de los polinomios de Jacobi

Proposición

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1-x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1) n!} \delta_{m,n}.$$

Polinomios de Jacobi para el intervalo $(0, 1)$

$$\begin{aligned} Q_n^{(\alpha, \beta)}(t) &:= P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2t) \\ &= \frac{1}{n! t^\alpha (1 - t)^\beta} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+\alpha} (1 - t)^{n+\beta}). \end{aligned}$$

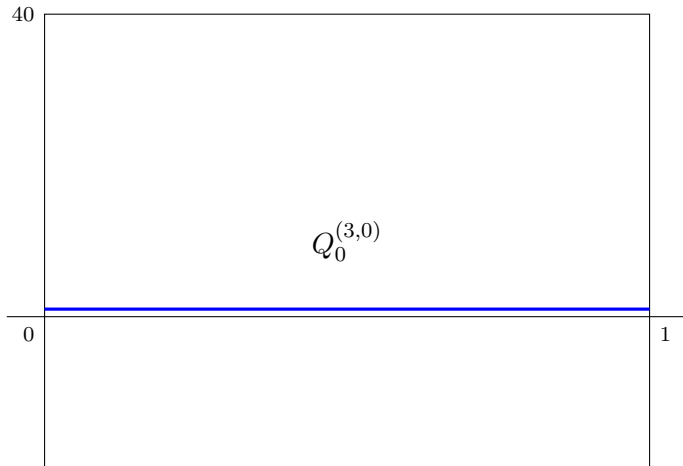
Ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^\alpha (1 - t)^\beta Q_m^{(\alpha, \beta)}(t) Q_n^{(\alpha, \beta)}(t) dt \\ = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1) n!} \delta_{m, n}. \end{aligned}$$

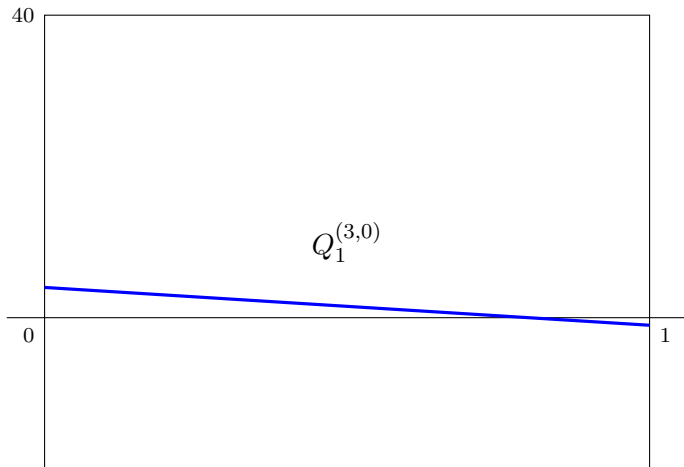
En particular, para $\beta = 0$,

$$\int_0^1 t^\alpha Q_m^{(\alpha, 0)}(t) Q_n^{(\alpha, 0)}(t) dt = \frac{1}{2n + \alpha + 1} \delta_{m, n}.$$

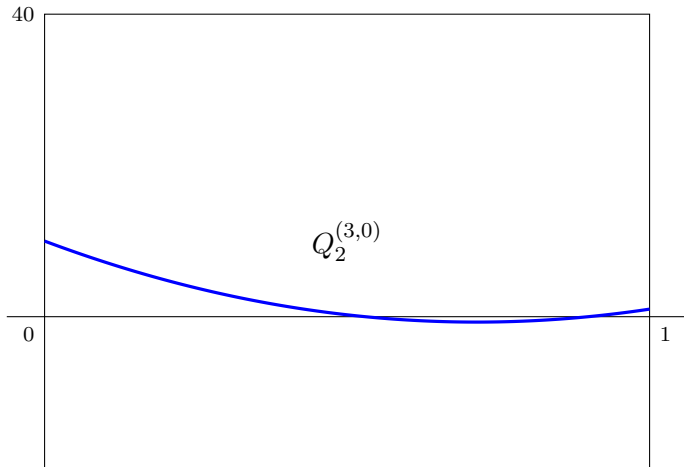
Gráficas de $Q_n^{(3,0)}$



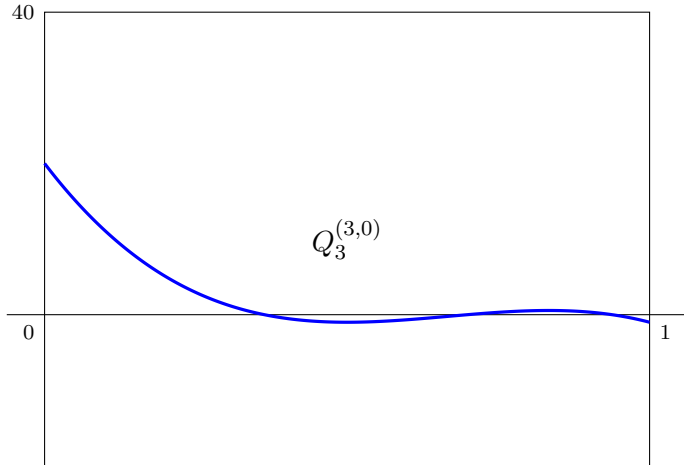
Gráficas de $Q_n^{(3,0)}$



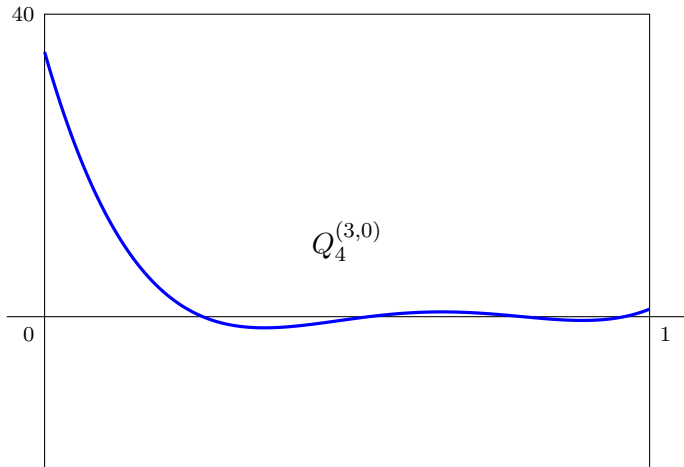
Gráficas de $Q_n^{(3,0)}$



Gráficas de $Q_n^{(3,0)}$



Gráficas de $Q_n^{(3,0)}$



Plan

Funciones monomiales
en $L^2(\mathbb{D})$

Polinomios
de Jacobi

Base ortonormal
en $L^2(\mathbb{D})$

Aplicaciones
a nuestro tema

Base ortonormal polinomial en $L^2(\mathbb{D})$

$$b_{p,q}(z) := (-1)^{p+q} \frac{\sqrt{p+q+1}}{(p+q)!} \frac{\partial^q}{\partial z^q} \frac{\partial^p}{\partial \bar{z}^p} \left((1 - z \bar{z})^{p+q} \right).$$



Abdul-Rashid K. Ramazánov, 1999.

Fórmula explícita

$$\begin{aligned}
 b_{p,q}(z) &:= (-1)^{p+q} \frac{\sqrt{p+q+1}}{(p+q)!} \frac{\partial^q}{\partial z^q} \frac{\partial^p}{\partial \bar{z}^p} \left((1 - z\bar{z})^{p+q} \right) \\
 &= \sqrt{p+q+1} \sum_{k=0}^{\min\{p,q\}} (-1)^k \frac{(p+q-k)!}{k!(p-k)!(q-k)!} z^{p-k} \bar{z}^{q-k}.
 \end{aligned}$$

Simetría hermiteana:

$$b_{q,p}(z) = \overline{b_{p,q}(z)}.$$

Proposición

$$\text{lin}\{b_{p,q} : p, q \in \mathbb{N}_0\} = \mathcal{P}(\mathbb{D}).$$

Subespacios diagonales truncados

Equivalencia entre $m_{j,k}$ y $b_{j,k}$

$$W_{0,2} = \text{lin}\{m_{0,0}, m_{1,1}\} = \text{lin}\{b_{0,0}, b_{1,1}\}$$

$m_{0,0}$	$m_{0,1}$	$m_{0,2}$	$m_{0,3}$...	$b_{0,0}$	$b_{0,1}$	$b_{0,2}$	$b_{0,3}$...
$m_{1,0}$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$...	$b_{1,0}$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$...
$m_{2,0}$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$...	$b_{2,0}$	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$b_{2,3}$...
$m_{3,0}$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$...	$b_{3,0}$	$b_{3,1}$	$b_{3,2}$	$b_{3,3}$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Subespacios diagonales truncados

Equivalencia entre $m_{j,k}$ y $b_{j,k}$

$$W_{-1,2} = \text{lin}\{m_{0,1}, m_{1,2}\} = \text{lin}\{b_{0,1}, b_{1,2}\}$$

$m_{0,0}$	$m_{0,1}$	$m_{0,2}$	$m_{0,3}$	\dots	$b_{0,0}$	$b_{0,1}$	$b_{0,2}$	$b_{0,3}$	\dots
$m_{1,0}$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	\dots	$b_{1,0}$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	\dots
$m_{2,0}$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	\dots	$b_{2,0}$	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$b_{2,3}$	\dots
$m_{3,0}$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$	\dots	$b_{3,0}$	$b_{3,1}$	$b_{3,2}$	$b_{3,3}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Subespacios diagonales truncados

Equivalencia entre $m_{j,k}$ y $b_{j,k}$

$$W_{1,3} = \text{lin}\{m_{1,0}, m_{2,1}, m_{3,2}\} = \text{lin}\{b_{1,0}, b_{2,1}, b_{3,2}\}$$

$m_{0,0}$	$m_{0,1}$	$m_{0,2}$	$m_{0,3}$	\dots	$b_{0,0}$	$b_{0,1}$	$b_{0,2}$	$b_{0,3}$	\dots
$m_{1,0}$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	\dots	$b_{1,0}$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	\dots
$m_{2,0}$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	\dots	$b_{2,0}$	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$b_{2,3}$	\dots
$m_{3,0}$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$	\dots	$b_{3,0}$	$b_{3,1}$	$b_{3,2}$	$b_{3,3}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Base ortonormal polinomial en $L^2(\mathbb{D})$

$$b_{p,q}(z) := (-1)^{p+q} \frac{\sqrt{p+q+1}}{(p+q)!} \frac{\partial^q}{\partial z^q} \frac{\partial^p}{\partial \bar{z}^p} \left((1 - z \bar{z})^{p+q} \right).$$

Otra forma equivalente:

$$b_{p,q}(z) = (-1)^q \frac{\sqrt{p+q+1}}{q!} \frac{\partial^q}{\partial z^q} \left(z^p (1 - z \bar{z})^q \right).$$

Expresión de $b_{p,q}$ en términos de los polinomios de Jacobi

Para $p \geq q$,

$$b_{p,q}(z) = (-1)^q \sqrt{p+q+1} z^{p-q} Q_q^{(p-q,0)}(|z|^2).$$

Idea de demostración. Por la fórmula de Rodrigues,

$$\frac{d^n}{dt^n} \left(t^{n+\alpha} (1-t)^{n+\beta} \right) = n! t^\alpha (1-t)^\beta Q_n^{(\alpha,\beta)}(t).$$

Expresión en coordenadas polares

Tenemos dos casos:

$$b_{p,q}(z) = \begin{cases} (-1)^q \sqrt{p+q+1} z^{p-q} Q_q^{(p-q,0)}(|z|^2), & p \geq q; \\ (-1)^p \sqrt{p+q+1} \bar{z}^{q-p} Q_p^{(q-p,0)}(|z|^2), & q \leq p. \end{cases}$$

Usamos las coordenadas polares:

$$z = r\tau, \quad 0 \leq r < 1, \quad |\tau| = 1, \quad \tau = e^{i\theta}.$$

Unimos dos casos:

$$b_{p,q}(r\tau) = (-1)^{\min\{p,q\}} \sqrt{p+q+1} \tau^{(p-q)} r^{|p-q|} Q_{\min\{p,q\}}^{|p-q|}(r^2).$$

Ortonormalidad

Teorema

$(b_{p,q})_{p,q=0}^{\infty}$ es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{D})$.

Base ortonormal en el caso con peso

Sea $\alpha > -1$. Consideramos \mathbb{D} con la medida

$$d\mu_\alpha(z) := \frac{\alpha + 1}{\pi} (1 - |z|^2)^\alpha d\mu(z).$$

$$b_{p,q}(z) := \sqrt{\frac{(\alpha + p + q + 1) \Gamma(\alpha + p + 1) \Gamma(\alpha + q + 1)}{(\alpha + 1) p! q! \Gamma(\alpha + p + q + 1)^2}} \times \\ \times (-1)^{p+q} (1 - z\bar{z})^{-\alpha} \frac{\partial^q}{\partial z^q} \frac{\partial^p}{\partial \bar{z}^p} \left((1 - z\bar{z})^{\alpha+p+q} \right).$$

Expresión en coordenadas polares ($0 \leq r < 1$, $\tau \in \mathbb{T}$):

$$b_{p,q}(r\tau) = (-1)^{\min\{p,q\}} c_{\alpha,p,q} \tau^{p-q} r^{|p-q|} Q_{\min\{p,q\}}^{(|p-q|, \alpha)}(r^2),$$

donde

$$c_{\alpha,p,q} = \sqrt{\frac{(\alpha + p + q + 1) \min\{p, q\}! \Gamma(\alpha + \max\{p, q\} + 1)}{(\alpha + 1) \max\{p, q\}! \Gamma(\alpha + \min\{p, q\} + 1)}}.$$

Plan

Funciones monomiales
en $L^2(\mathbb{D})$

Polinomios
de Jacobi

Base ortonormal
en $L^2(\mathbb{D})$

Aplicaciones
a nuestro tema

Funciones n -analíticas


Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{C} .

Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se llama **n -analítica** si

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f \equiv 0.$$

Notación: $\mathcal{A}_n(\Omega)$.

Ejemplo: $m_{p,q} \in \mathcal{A}_{q+1}(\mathbb{D})$.

 Mark B. Balk, Polyanalytic Functions, Akad.-Verl., 1991.

Operadores de rotación

$$\mathbb{T} := \{\tau \in \mathbb{C}: |\tau| = 1\}.$$

Para τ en \mathbb{T} ,

$$(R_\tau f)(z) := f(\tau^{-1}z).$$

Operadores de rotación y monomios

$$R_\tau m_{p,q} = \tau^{q-p} m_{p,q}.$$

Operadores de rotación y funciones básicas

$$R_\tau b_{p,q} = \tau^{q-p} b_{p,q}.$$

Operadores radiales en $L^2(\mathbb{D})$

$$\mathcal{R} := \{S \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{D})) : \forall \tau \in \mathbb{T} \quad SR_\tau = R_\tau S\}.$$

Proposición

\mathcal{R} es un álgebra de von Neumann.

Problema

Entender la estructura de \mathcal{R} .

Veremos que la estructura de \mathcal{R} se describe en términos de los subespacios W_ξ .

Operadores radiales en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

$$\mathcal{R}_n := \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})) : \forall \tau \in \mathbb{T} \quad SR_\tau = R_\tau S\}.$$

Proposición

\mathcal{R}_n es un álgebra de von Neumann.

Problema

Entender la estructura de \mathcal{R}_n .

Veremos que la estructura de \mathcal{R} se describe en términos de los subespacios diagonales truncados $W_{\xi, \min\{n, \xi+n\}}$.