


De la convergencia en distribución a la convergencia uniforme de las funciones cuantil

Egor A. Maximenko

trabajos conjuntos con Johan Manuel Bogoya,
Albrecht Böttcher y Sergei M. Grudsky

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Congreso Nacional
de la Sociedad Matemática Mexicana
Aguascalientes, México
Octubre del 2016



Función
cuantil

Teoremas de
convergencia

Aplicación:
matrices de Toeplitz

Definición de la función cuantil

$\mathcal{M}(\mathbb{R}) :=$ las medidas de probabilidad Borel $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.

Dada $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, se definen:

la **función de distribución** $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\mu(v) := \mu(-\infty, v],$$

Definición de la función cuantil

$\mathcal{M}(\mathbb{R}) :=$ las medidas de probabilidad Borel $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.

Dada $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, se definen:

la **función de distribución** $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\mu(v) := \mu(-\infty, v],$$

y la **función cuantil** $Q_\mu: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Q_\mu(p) := \inf\{v \in \mathbb{R} : F_\mu(v) \geq p\}.$$

Definición de la función cuantil

$\mathcal{M}(\mathbb{R}) :=$ las medidas de probabilidad Borel $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.

Dada $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, se definen:

la **función de distribución** $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\mu(v) := \mu(-\infty, v],$$

y la **función cuantil** $Q_\mu: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Q_\mu(p) := \inf\{v \in \mathbb{R} : F_\mu(v) \geq p\}.$$

Q_μ es la función inversa derecha superior de F_μ .

El **soporte** de μ se define como

$$\text{supp}(\mu) := \{v \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(v - \varepsilon, v + \varepsilon) > 0\}.$$

La función cuantil asociada a una variable aleatoria

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad,
y sea $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{F} -medible.

Le asociamos la **medida imagen** $\mu_X \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$:

$$\mu_X(B) := P(X^{-1}(B)) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}.$$

En este caso, la función de distribución y la función cuantil son:

$$F_X(v) = \mu_X(-\infty, v] = P(X^{-1}(-\infty, v]) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq v\},$$

$$Q_X(p) = \inf\{v \in \mathbb{R}: F_X(v) \geq p\}.$$

Medida asociada a un vector

Dado un vector $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,
lo consideramos como v.a. $\lambda: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$,
donde $\{1, \dots, n\}$ dotamos con la medida de conteo normalizada.

Definimos $\mu_\lambda: \text{Borel}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]$,

$$\mu_\lambda(B) := \frac{\#\{j: \lambda_j \in B\}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Dirac}_{\lambda_j}.$$

En este caso

$$F_\lambda(v) = \frac{\#\{j: \lambda_j \leq v\}}{n}.$$

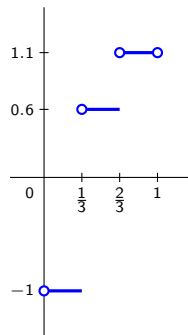
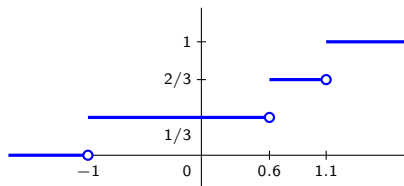
En particular, si $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, entonces

$$F_\lambda(v) = \frac{\text{máx}\{j: \lambda_j \leq v\}}{n}, \quad Q_\lambda(p) = \lambda_{\lceil pn \rceil}.$$

Ejemplo de medida asociada a un vector

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 0.6, 1.1).$$

La función de distribución y la función cuantil:




Otro ejemplo discreto



Los mismos números en el orden ascendente ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{10}$):



$Q(1/3) = \lambda_{\lceil 10/3 \rceil} = \lambda_4 = 118.$



La medida y la función cuantil asociadas a una función

Sea $a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

La **medida imagen** $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$:

$$\mu_a(B) := \frac{1}{2\pi} \mu_{\mathbb{R}}(a^{-1}(B)).$$

El **soporte** de μ_a es la imagen esencial de a :

$$\text{supp}(a) = \mathcal{R}(a).$$

F_a := la **función de distribución** de a :

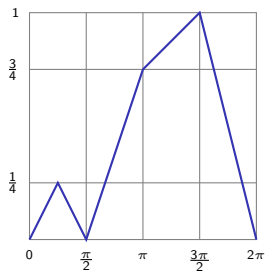
$$F_a(v) := \frac{1}{2\pi} \mu_{\mathbb{R}} \{ \theta \in [0, 2\pi] : a(\theta) \leq v \}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Q_a := la **función cuantil** correspondiente:

$$Q_a(p) := \inf \{ v \in \mathbb{R} : F_a(v) \geq p \}, \quad p \in (0, 1).$$

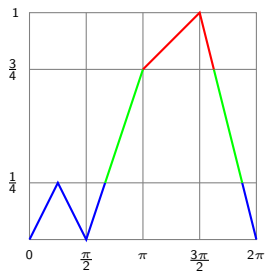
Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de a



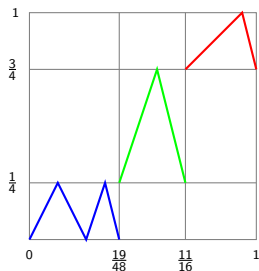
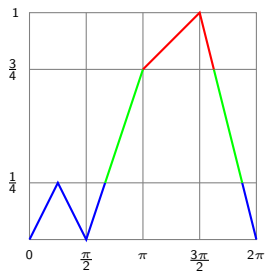
Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de a



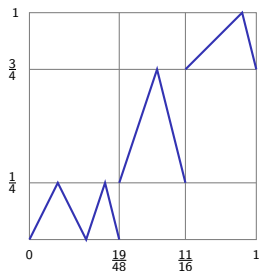
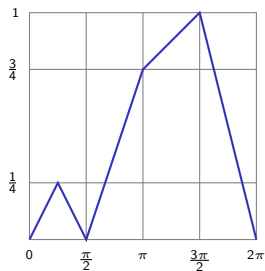
Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de a

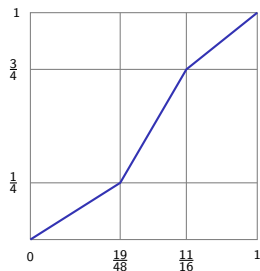


Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de a

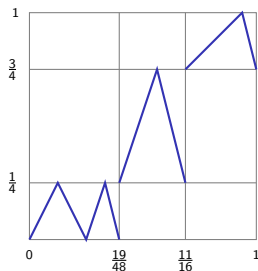
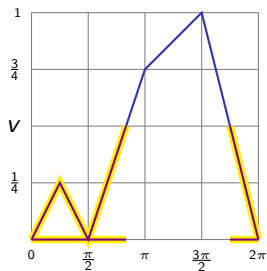


Gráfica de Q_a

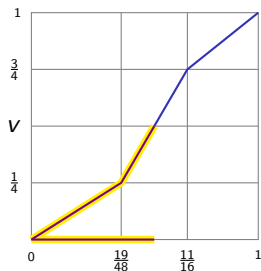


Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de a



Gráfica de Q_a

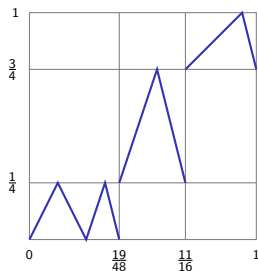
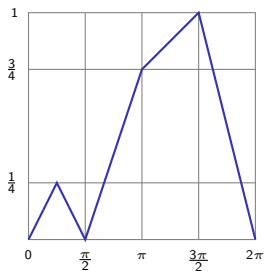


a y Q_a son idénticamente distribuidas:

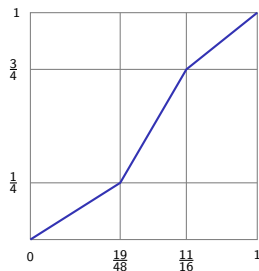
$$\frac{1}{2\pi} \mu_{\mathbb{R}} \{ \theta \in [0, 2\pi] : a(\theta) \leq v \} = \mu_{\mathbb{R}} \{ p \in [0, 1] : Q_a(p) \leq v \}$$

Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de a



Gráfica de Q_a



a $\xrightarrow{\text{reordenamiento "a la Lebesgue"}}$ Q_a



Función
cuantil

Teoremas de
convergencia

Aplicación:
matrices de Toeplitz

Puntos de continuidad de una función

Sean X, Y algunos espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

$$\mathcal{C}(f) := \{x \in X: f \text{ es continua en } x\}.$$

Por ejemplo, si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 + \lfloor x \rfloor}{1 + x^2},$$

entonces

$$\mathcal{C}(f) =$$

Puntos de continuidad de una función

Sean X, Y algunos espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

$$\mathcal{C}(f) := \{x \in X : f \text{ es continua en } x\}.$$

Por ejemplo, si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 + \lfloor x \rfloor}{1 + x^2},$$

entonces

$$\mathcal{C}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Convergencia en distribución ($\mu_n \rightsquigarrow \Lambda$)

Sea $\Lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y sea $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\Lambda$$



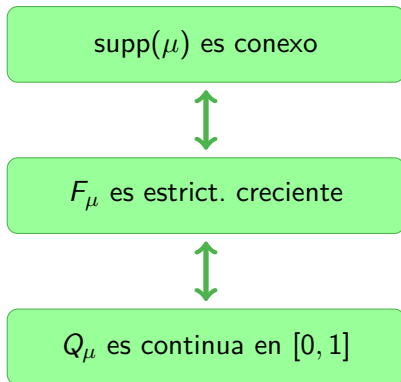
$$\forall v \in \mathcal{C}(F_{\Lambda}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mu_n}(v) = F_{\Lambda}(v)$$



$$\forall p \in \mathcal{C}(Q_{\Lambda}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\mu_n}(p) = Q_{\Lambda}(p)$$

Criterio de continuidad de la función cuantil

Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ una medida de soporte compacto $\text{supp}(\mu)$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:



Lema sobre la convergencia uniforme

$$f_n(p) \rightarrow g(p) \\ \forall p \in [0, 1]$$

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \text{ son crecientes}$$

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ g \text{ es continua}$$

$$f_n \xrightarrow{[0,1]} g$$

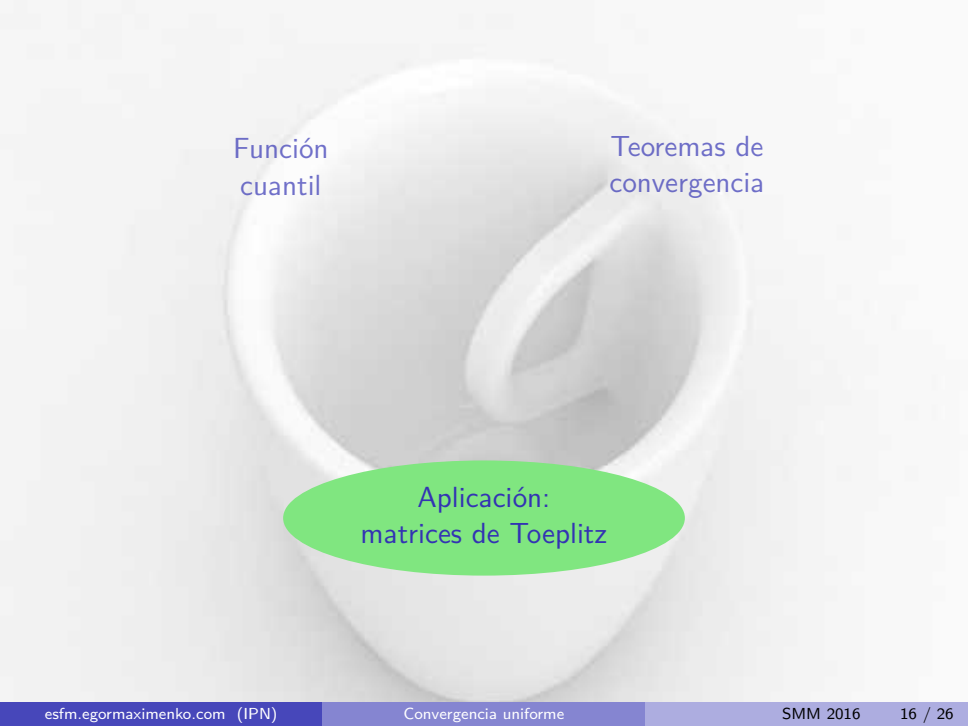
Resultado principal

$$\mu_n \rightsquigarrow \Lambda$$

$$\mu_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$$
$$\text{supp}(\mu_n) \subseteq [\alpha, \beta]$$

$$\Lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$$
$$\text{supp}(\Lambda) = [\alpha, \beta]$$

$$Q_{\mu_n} \xrightarrow{[0,1]} Q_{\Lambda}$$



Función
cuantil

Teoremas de
convergencia

Aplicación:
matrices de Toeplitz

Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Es cómodo suponer que a_j son los coeficientes de Fourier de una función a definida en $[0, 2\pi]$:

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) e^{-ji\theta} d\theta.$$

La función a se llama el *símbolo generador* de las matrices

$$T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=1}^n.$$

Matrices de Toeplitz con símbolos reales acotados

Suponemos que el símbolo generador es acotado y real:

$$a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R}).$$

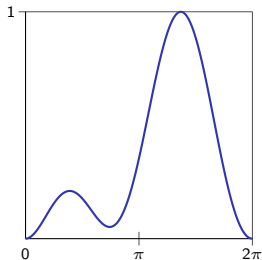
En este caso las matrices de Toeplitz son hermitianas:

$$a_{-k} = \overline{a_k}, \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} & \overline{a_4} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas

Gráfica de a

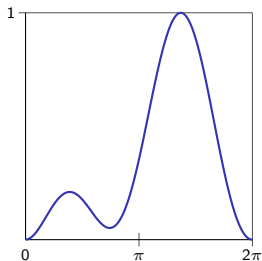


Valores propios de $T_8(a)$



Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas

Gráfica de a

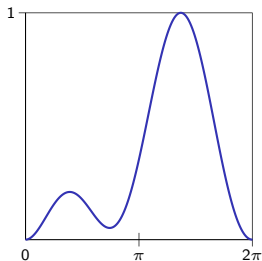


Valores propios de $T_{16}(a)$



Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas

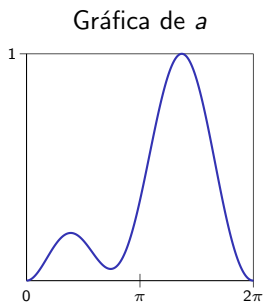
Gráfica de a



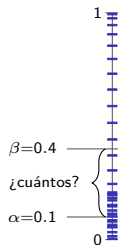
Valores propios de $T_{32}(a)$



Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas

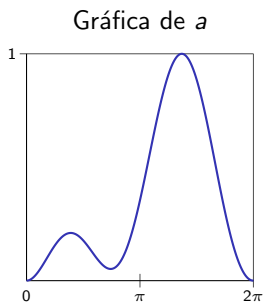


Valores propios de $T_{32}(a)$

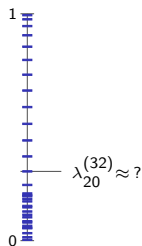


Primera pregunta: ¿Cuántos valores propios están en $[\alpha, \beta]$?

Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas



Valores propios de $T_{32}(a)$



Primera pregunta: ¿Cuántos valores propios están en $[\alpha, \beta]$?

Segunda pregunta: $\lambda_j^{(n)} \approx ?$

El primer teorema límite de Szegő (1920)

símbolo generador
 $a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$

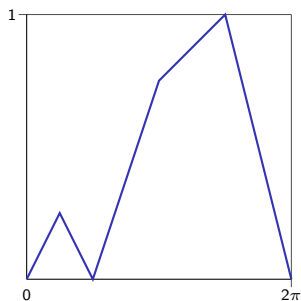
$\alpha < \beta$
 $a(\theta) \neq \alpha, \beta$ a.e.

$$\frac{\#\{j: \alpha \leq \lambda_j^{(n)} \leq \beta\}}{n} \longrightarrow \frac{\mu_{\mathbb{R}}(a^{-1}([\alpha, \beta]))}{2\pi}$$

En otras palabras, $\mu_{\lambda^{(n)}} \rightsquigarrow \mu_a$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de a

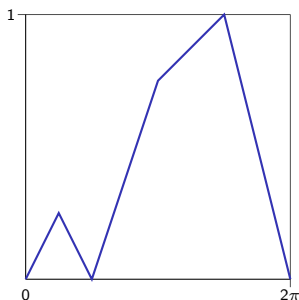


Valores propios de $T_{32}(a)$

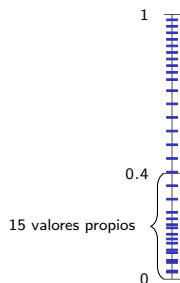


Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de a



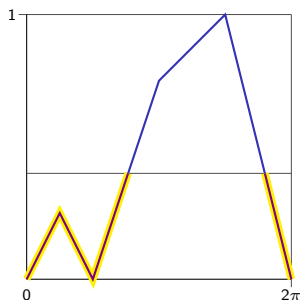
Valores propios de $T_{32}(a)$



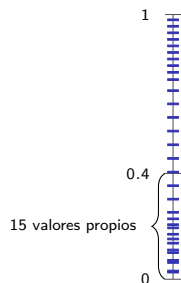
$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de a



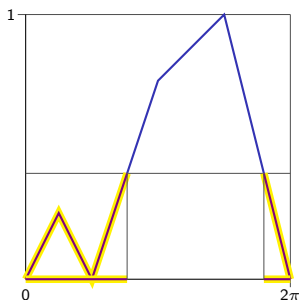
Valores propios de $T_{32}(a)$



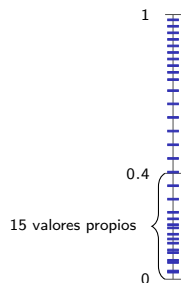
$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de a



Valores propios de $T_{32}(a)$

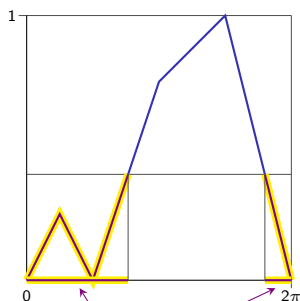


15 valores propios

$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

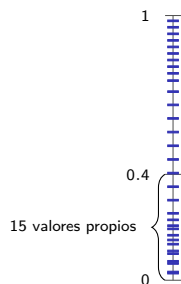
Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de a



$$\frac{\mu_{\mathbb{R}} \{ \theta : 0 \leq a(\theta) \leq 0.4 \}}{2\pi} = 0.483$$

Valores propios de $T_{32}(a)$



$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

Aproximación uniforme de valores propios de matrices de Toeplitz

$$a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$$

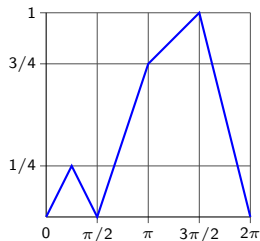
$$\mathcal{R}(a) = [\alpha, \beta]$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j^{(n)} - Q_a(j/n)| \longrightarrow 0$$

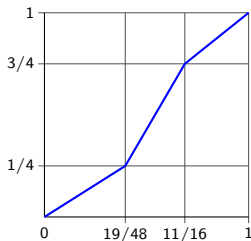
Primer ejemplo

Símbolo generador continuo

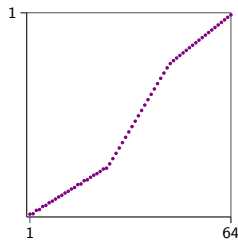
Gráfica de a



Gráfica de Q_a



Valores propios de $T_{64}(a)$



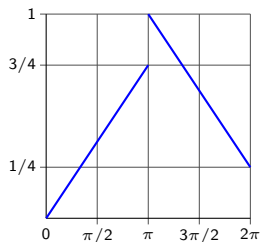
Cada valor propio $\lambda_j^{(n)}$ se muestra como un punto $\left(\frac{j}{n}, \lambda_j^{(n)}\right)$.

Observamos que el tercer dibujo es muy similar al segundo.

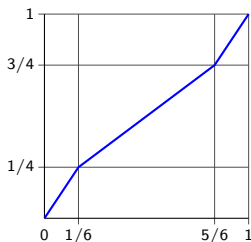
Otro ejemplo

a no es continua, pero $\mathcal{R}(a)$ es conexo

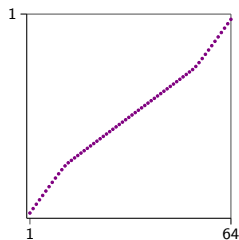
Gráfica de a



Gráfica de Q_a



Eigenvalores de $T_{64}(a)$



$\lambda_j^{(n)}$ se aproxima uniformemente por $Q_a(j/n)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Más aplicaciones

Hay muchos resultados sobre la distribución asintótica:

- Teorema de Avram–Parter sobre los valores singulares.
- Teoremas tipo Szegő para matrices localmente de Toeplitz.
- La ley de arco seno de Lévy para caminatas aleatorias.
- Teorema de Weyl sobre sucesiones uniformemente distribuidas.

Con el concepto de la función cuantil se deducen corolarios sobre la aproximación uniforme.

Conclusión sobre los eigenvalores de matrices de Toeplitz



Conclusión sobre los eigenvalores de matrices de Toeplitz

El teorema límite de Szegő combinado con el concepto de función cuantil nos proporciona el término principal de la asintótica de los eigenvalores:

$$\lambda_j^{(n)} \approx Q_a\left(\frac{j}{n}\right)$$

suponiendo que $\mathcal{R}(a)$ es un intervalo cerrado de \mathbb{R} .